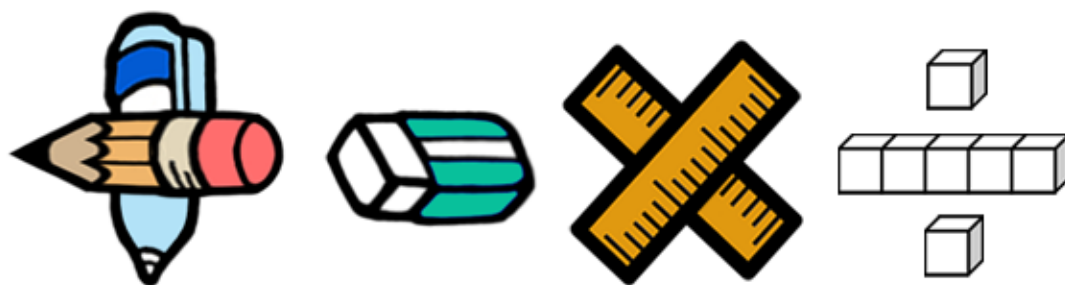




基本學習內容：AC-8-3-3

整係數多項式除法運算

【教師用】





基本學習內容：AC-8-3-3

學習內容：

A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。

基本學習內容：

AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算。

基本學習表現：

ACP-8-3-3-1 理解以長除法進行整係數多項式的除法運算。

ACP-8-3-3-2 能以「被除式= 除式商式餘式」的式子表示被除式、除式、商式和餘式之間的關係。

ACP-8-3-3-3 熟練整係數多項式的簡易加、減、乘法混合運算。

概要說明：

整係數多項式的除法運算

■ 基本學習內容 AC-8-3-3 為 AC-8-3-1、AC-8-3-2 之後續學習概念，故學生應該已能進行兩整係數多項式的乘法和減法運算。

本基本學習內容幫助學生運用橫式或直式理解多項式除法運算。

■ 被除式 A 除以除式 B ，得到商式 Q 及餘式 R ，一般學生會記為 $A \div B = Q \dots R$ ，因 $A \div B = Q \dots R$ 其中的等號只說明 A 式除以 B 式得到商式 Q 和餘式 R ，並不代表兩邊相等，因此無法同加、同減、同乘或同除，建議老師引導學生將其記為 $A = B \times Q + R$ 。

■ 當學生能將 $A \div B = Q \dots R$ 記為 $A = B \times Q + R$ 的式子時，學生只要能夠知道被除式、除式、商式和餘式之間關係，在已知其中三式的情況下，透過除法原理推導出另一式即可，如：「一個多項式除以 $x - 3$ 得商式 $2x - 1$ ，餘式 4 ，求此多項式。」

■ 本基本學習內容之多項式的四則運算，屬於重要且基本的學習內容，建議多項式乘法裡，乘積次數最高為三次；其除法的計算中，被除式次數最高為二次。

■ 本學習內容之多項式運算，不引入分離係數法進行多項式的運算。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

◎多項式的除法

- (1)「桌上有一些糖果，有袋裝和散裝，共有 12 袋又 20 顆，現在將 2 袋又 3 顆裝成一個禮物盒，請問共可裝成幾盒禮物盒？還剩下幾顆糖果？」
假設 1 袋糖果有 x 顆，請用除法算式把問題記下來。

解：

設 1 袋糖果有 x 顆，那麼

12 袋又 20 顆糖果記為 $12x+20$ 顆，2 袋又 3 顆糖果記為 $2x+3$ 顆，

因為 12 袋又 20 顆，每 2 袋又 3 顆裝一盒，共可裝成 6 盒剩 2 顆。

可將算式記成

$$(12x+20) \div (2x+3) = 6 \cdots 2。$$

$(12x+20) \div (2x+3) = 6 \cdots 2$ ，可看成兩個多項式相除的運算與結果，我們稱為多項式除法運算。



◎ 商式與餘式

作整數除法運算 $605 \div 20$ 時，我們先將它看成計算「605 是 20 的幾倍？」
因為 600 是 20 的 30 倍，估計 605 大約是 20 的 30 倍，
再利用先乘後減計算，得到 $605 - 20 \times 30 = 5$ ，
所以 $605 \div 20 = 30 \cdots 5$ 。



教材內容說明：

1. 本教材第 1～5 頁的教學重點在幫助學生理解多項式除法運算。
2. 第(1)題給定兩種包裝的糖果顆數，分別為袋裝 x 顆，散裝 12 顆，並以 2 袋又 3 顆裝成一禮物盒，要求學生算出可裝的禮物盒數與剩下顆數，以及利用除法算式記錄解題過程。
 - 本頁引入第(1)題的目的在幫助學生認識多項式除法的意義，如果學生不會以符號代表數列式，教師可參考 AC-7-1-1 教材進行教學。
3. 本頁對話框幫助學生理解引進多項式除法的意義。
4. 本頁複習框幫助學生複習整數的除法運算，當中先比較兩數的倍數關係，再利用先減後乘方法檢驗兩數的關係。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

- (2)① 已知 $(6x^2 + 5) \div 2x = () \cdots ()$ ，並在括號內填入正確的多項式。
 ② 已知 $(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = () \cdots ()$ ，並在括號內填入正確的多項式。

解：

①

將 $(6x^2 + 5) \div 2x$ 看成計算「 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的幾倍？」，
 因為 $2x \cdot 3x = 6x^2$ ，估計 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的 $3x$ 倍，
 利用先乘後減，得到

$$(6x^2 + 5) - 2x \cdot 3x = (6x^2 + 5) - 6x^2 = 5，$$

所以 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的 $3x$ 倍多 5 ，

在除法算式中前後兩個括號，依序填入 $3x$ 、 5 ，寫成

$$(6x^2 + 5) \div 2x = (3x) \cdots (5)。$$

②

將 $(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2$ 看成計算「 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的幾倍？」，
 因為 $2x^2 \cdot 3 = 6x^2$ ，估計 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的 3 倍，
 利用先乘後減，得到

$$(6x^2 + 4x + 5) - 2x^2 \cdot 3 = (6x^2 + 4x + 5) - 6x^2 = 4x + 5，$$

所以 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的 3 倍多 $4x + 5$ ，

在除法算式中前後兩個括號，依序填入 3 、 $4x + 5$ ，寫成

$$(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = (3) \cdots (4x + 5)。$$

從第(2)題的結果：

$$(6x^2 + 5) \div 2x = (3x) \cdots (5)，$$

$$(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = (3) \cdots (4x + 5)，$$

我們將 $6x^2 + 5$ 、 $6x^2 + 4x + 5$ 稱為被除式，

$2x$ 、 $2x^2$ 稱為除式， $3x$ 、 3 稱為商式， 5 、 $4x + 5$ 稱為餘式，

發現餘式 5 、 $4x + 5$ 的次數低於除式 $2x$ 、 $2x^2$ 。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 1～5 頁的教學重點在幫助學生理解多項式除法運算。
2. 第(2)題含有兩個子問題，要求學生在括號內填入正確的多項式。

子問題①： $(6x^2 + 5) \div 2x = () \cdots ()$

子問題②： $(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = () \cdots ()$

子問題①方法：教師先幫助學生比較 $6x^2 + 5$ 與 $2x$ 兩式的最高次項係數與次數，

估計 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的 $3x$ 倍，再利用先乘後減運算，得到 5；

所以 $6x^2 + 5$ 是 $2x$ 的 $3x$ 倍多 5，最後幫助學生在括號內填入適當的多項式

$$(6x^2 + 5) \div 2x = (3x) \cdots (5)。$$

子問題②方法：教師先幫助學生比較 $6x^2 + 4x + 5$ 與 $2x^2$ 兩式的最高次項係數與次數，

估計 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的 3 倍，再利用先乘後減運算，得到 $4x + 5$ ；

所以 $6x^2 + 4x + 5$ 是 $2x^2$ 的 3 倍多 $4x + 5$ ，

最後幫助學生在括號內填入適當的多項式

$$(6x^2 + 4x + 5) \div 2x^2 = (3) \cdots (4x + 5)。$$

3. 本頁對話框在幫助學生將先乘後減運算看成是多項式除法運算方法之一，並介紹多項式除法運算相關名詞。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

(3)① 請計算 $(4x^2 - 4x + 2) \div (-2x)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

② 請計算 $(3x^2 - 4x + 1) \div (-x^2 - x - 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

①

因為 $(-2x) \cdot (-2x) = 4x^2$ ，

估計 $4x^2 - 4x + 2$ 是 $-2x - 1$ 的 $-2x$ 倍，利用先乘後減運算，得到

$$\begin{aligned} & (4x^2 - 4x + 2) - (-2x - 1)(-2x) \\ &= (4x^2 - 4x + 2) - (4x^2 + 2x) \\ &= -6x + 2 \end{aligned}$$

又 $(-2x) \cdot 3 = -6x$ ，

估計 $-6x + 2$ 是 $-2x - 1$ 的 3 倍，利用先乘後減運算，得到

$$\begin{aligned} & (-6x + 2) - (-2x - 1) \cdot 3 \\ &= (-6x + 2) - (-6x + 3) \\ &= -1 \end{aligned}$$

所以 $4x^2 - 4x + 2$ 是 $-2x - 1$ 的 $-2x$ 又 3 倍多 -1 ，可記成

除法算式 $(4x^2 - 4x + 2) \div (-2x - 1) = -2x + 3 \cdots -1$ ，

因此，商式為 $-2x + 3$ ，餘式為 -1

②

因為 $(-x^2) \cdot (-3) = 3x^2$ ，

估計 $3x^2 - 4x + 1$ 是 $-x^2 - x - 1$ 的 -3 倍，利用先乘後減運算，得到

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 4x + 1) - (-x^2 - x - 1)(-3) \\ &= (3x^2 - 4x + 1) - (3x^2 + 3x + 3) \\ &= -7x - 2 \end{aligned}$$

所以 $3x^2 - 4x + 1$ 是 $-x^2 - x - 1$ 的 -3 倍多 $-7x - 2$ ，可記成

除法算式 $(3x^2 - 4x + 1) \div (-x^2 - x - 1) = -3 \cdots -7x - 2$ ，

因此，商式為 -3 ，餘式為 $-7x - 2$ 。



教材內容說明：

1. 本教材第 1～5 頁的教學重點在幫助學生理解多項式除法運算。
2. 第(3)題含有兩個子問題，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。

子問題①： $(4x^2 - 4x + 2) \div (-2x)$

子問題②： $(3x^2 - 4x + 1) \div (-x^2 - x - 1)$

子問題①方法：教師先幫助學生比較 $4x^2 - 4x + 2$ 與 $-2x$ 兩式的最高次項係數與次數，

估計 $4x^2 - 4x + 2$ 是 $-2x$ 的 $-2x$ 倍，再利用先乘後減運算，得到 $-6x + 2$ ；

比較 $-6x + 2$ 與 $-2x$ 兩式的最高次項係數與次數，估計 $-6x + 2$ 是 $-2x$ 的 3 倍，

再利用先乘後減運算，得到 -1 ，最後幫助學生寫出商式 $-2x + 3$ ，餘式 -1 。

子問題②方法：教師先幫助學生比較 $3x^2 - 4x + 1$ 與 $-x^2 - x - 1$ 兩式的最高次項係數與次數，

估計 $3x^2 - 4x + 1$ 是 $-x^2 - x - 1$ 的 -3 倍，再利用先乘後減運算，得到 $-7x - 2$ ，

最後幫助學生寫出商式 -3 ，餘式 $-7x - 2$ 。

- 本頁引入第(3)題的目的在幫助學生理解多項式除法運算的餘式次數要比除式次數低，如果學生不理解，教師可以提問：「 $-7x - 2$ 是的 $-x^2 - x - 1$ 的幾倍？這個倍數可以用常數或 x 表示嗎？」，來幫助學生理解當倍數不是多項式、零次多項式(常數)時，除法即無法再繼續做下去，從餘式觀點來說，只要餘式次數要比除式次數低，就算完成多項式的除法運算。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

從第(3)題①②結果發現：

只要讓餘式的次數低於除式的次數，即完成除法運算，
我們接受商式、餘式為含負係數多項式或負常數項，例如：

$(4x^2 - 4x + 2) \div (-2x - 1) = -2x + 3 \cdots -1$ 的商式為 $-2x + 3$ ，
餘式為 -1 。

$(3x^2 - 4x + 1) \div (-x^2 - x - 1) = -3 \cdots -7x - 2$ 的商式為 -3 ，
餘式為 $-7x - 2$ 。



多項式除法 $A \div B = Q \cdots R$ ，其中多項式 R 的次數要低於多項式 B 的次數，

我們稱 A 為被除式， B 為除式， Q 為商式， R 為餘式。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1～5 頁的教學重點在幫助學生理解多項式除法運算。
2. 本頁對話框在幫助學生進行多項式除法運算，直到讓餘式的次數低於除式的次數，即完成運算。另外，也接受商式、餘式為含負係數多項式或負常數項。
3. 本頁定義框在幫助學生利用文字符號紀錄多項式除法運算算式 $A \div B = Q \cdots R$ ，並強調餘式 R 的次數要低於除式 B 的次數。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

◎利用直式除法作多項式除法運算

(4)①請用直式除法計算 $(6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1) \div (3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1)$ 的結果。

②請用直式除法計算 $(6x^2 + 5x + 8) \div (3x^2 + x + 2)$ 的結果。

解：

①

$6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1$ 可記為 $6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1$ ，

$3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1$ 可記為 $3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1$ ，

直式除法過程如下所示，

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1 \overline{) 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1} \\ \underline{6 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 1} \\ 3 \times 10^1 + 4 \times 1 \end{array}$$

將過程用橫式記錄：

$(6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1) \div (3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1) = 2 \cdots (3 \times 10^1 + 4 \times 1)$ ，

所以 $(6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1) \div (3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1)$ 的商數為 2，

餘數為 $3 \times 10^1 + 4 \times 1 = 34$ 。

②

將①的 10 用 x 代替，

$6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1$ 記為 $6x^2 + 5x^1 + 8$ ，

$3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1$ 記為 $3x^2 + 1x^1 + 2$ ，

直式除法過程如下所示，

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3x^2 + x^1 + 2 \overline{) 6x^2 + 5x^1 + 8} \\ \underline{6x^2 + 2x^1 + 4} \\ 3x^1 + 4 \end{array}$$

將過程用橫式記錄： $(6x^2 + 5x^1 + 8) \div (3x^2 + 1x^1 + 2) = 2 \cdots (3x^1 + 4)$ ，

所以 $(6x^2 + 5x + 8) \div (3x^2 + x + 2)$ 的商為 2，餘式為 $3x^1 + 4 = 3x + 4$ 。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～12 頁的教學重點在幫助學生利用長除法作多項式除法運算。
2. 第(4)題含有兩個子問題，要求學生計算出結果。

子問題①： $(6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1) \div (3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1)$

子問題②： $(6x^2 + 5x + 8) \div (3x^2 + x + 2)$

子問題①方法：教師先幫助學生將 $(6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1) \div (3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1)$ 與改記成

$(6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 1) \div (3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 1)$ 進行長除法運算，比較兩式的最高次項係數與次數，應在商式寫 2，進行長除法運算，得到 $3 \times 10^2 + 4 \times 1$ ，最後要求學生寫出商式 2，餘式 $3 \times 10^2 + 4 \times 1$ 。

子問題②方法：教師先幫助學生將 $(6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \times 1) \div (3 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1)$ 除法運算裡的

10 換成 x ，改記成 $(6x^2 + 5x + 8) \div (3x^2 + x + 2)$ 進行長除法運算，比較兩式的最高次項係數與次數，應在商式寫 2，進行長除法運算，得到 $3x^1 + 4$ ，最後要求學生寫出商式 2，餘式 $3x^1 + 4$ 。

- 本頁引入第(4)題的目的幫助學生透過數的長除法類比多項式除法運算之長除法的紀錄。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

(5) 請利用直式除法計算 $(2x^2 + 7x + 1) \div (x^2 + 2x + 3)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

直式除法過程如下：

$$\begin{array}{r}
 \boxed{x^2 \cdot 2 = 2x^2} \\
 \downarrow 2 \\
 \begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 3 \overline{) 2x^2 + 7x + 1} \\
 \underline{2x^2 + 4x + 6} \quad \leftarrow \boxed{(x^2 + 2x + 3) \cdot 2} \\
 3x + (-5)
 \end{array}
 \end{array}$$

所以 $(2x^2 + 7x + 1) \div (x^2 + 2x + 3)$ 的商為 2，餘式為 $3x + (-5) = 3x - 5$ 。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～12 頁的教學重點在幫助學生利用長除法作多項式除法運算。
2. 第(5)題給定 $(2x^2 + 7x + 1) \div (x^2 + 2x + 3)$ ，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。

教師先幫助學生比較 $2x^2 + 7x + 1$ 與 $x^2 + 2x + 3$ 兩式的最高次項係數與次數，應在商式寫 2，進行長除法運算，得到 $3x - 5$ ，最後要求學生寫出商式 2，餘式 $3x - 5$ 。

- 本頁引入第(5)題的目的幫助學生理解二次多項式除以二次多項式的運算，如果學生不知道如何寫商式，教師可以先利用含有括號的乘法算式，比較兩多項式的最高次項係數與次數，要求學生填入適當的多項式，例如：「比較 $2x^2 + 7x + 1$ 與 $x^2 + 2x + 3$ 兩式的最高次項係數與次數， $x^2 \cdot () = 2x^2$ ，應填入多少？」應填入 2，所以在商式寫入 2，接著幫助學生計算 $(x^2 + 2x + 3) \cdot 2$ ，將結果寫入長除法對應的位置，進行長除法運算。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

(6)①請利用直式除法計算 $(3x^2 - 5x - 4) \div (x^2 - 3x + 2)$ 的結果，並寫出商與餘式。

②請利用直式除法計算 $(3x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + x + 1)$ 的結果，並寫出商與餘式。

解：

①

將被除式 $3x^2 - 5x - 4$ 記為 $3x^2 + (-5)x + (-4)$ ；

除式 $x^2 - 3x + 2$ 記為 $x^2 + (-3)x + 2$ ，進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r} 3 \\ x^2 + (-3)x + 2 \overline{) 3x^2 + (-5)x + (-4)} \\ \underline{3x^2 + (-9)x + 6} \\ 4x + (-10) \end{array}$$

所以 $(3x^2 - 5x - 4) \div (x^2 - 3x + 2)$ 的商為 3，餘式為 $4x + (-10) = 4x - 10$ 。

②

直式除法過程如下所示：

$$\begin{array}{r} 2x^2 \cdot \frac{3}{2} = 3x^2 \\ \downarrow \frac{3}{2} \\ 2x^2 + x + 1 \overline{) 3x^2 + 2x + 1} \\ \underline{3x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2}) \end{array} \quad \leftarrow (2x^2 + x + 1) \cdot \frac{3}{2}$$

所以 $(3x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + x + 1)$ 的商為 $\frac{3}{2}$ ，餘式為 $\frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～12 頁的教學重點在幫助學生利用長除法作多項式除法運算。
2. 第(6)題含有兩個子問題，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。

子問題①： $(3x^2 - 5x - 4) \div (x^2 - 3x + 2)$

子問題②： $(3x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + x + 1)$

子問題①方法：教師先幫助學生比較 $3x^2 - 5x - 4$ 與 $x^2 - 3x + 2$ 兩式的最

高次項係數與次數，應在商式寫 3，進行長除法運算，得到 $4x - 10$ ，最後要求學生寫出商式 3，餘式 $4x - 10$ 。

子問題②方法：教師先幫助學生比較 $3x^2 + 2x + 1$ 與 $2x^2 + x + 1$ 兩式的最

高次項係數與次數，應在商式寫 $\frac{3}{2}$ ，進行長除法運算，得到 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ，最

後要求學生寫出商式 $\frac{3}{2}$ ，餘式 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 。

- 本頁引入第(3)題的目的幫助學生熟練二次多項式除以二次多項式的運算，如果學生不知道如何寫商式，教師可以先利用含有括號的乘法算式，比較兩多項式的最高次項係數與次數，要求學生填入適當的多項式，例如：「比較 $3x^2 + 2x + 1$ 與 $2x^2 + x + 1$ 兩式的最高次項係數與次數， $2x^2 \cdot (\quad) = 3x^2$ ，應填入多少？」應填入 $\frac{3}{2}$ ，所以在商式寫入 $\frac{3}{2}$ ，接著幫助學生計算 $(2x^2 + x + 1) \cdot \frac{3}{2}$ ，將結果寫入長除法對應的位置，進行長除法運算。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

從第(6)題①發現：

作 $(3x^2 - 5x - 4) \div (x^2 - 3x + 2)$ 運算時，可改記為

$[3x^2 + (-5)x + (-4)] \div [1x^2 + (-3)x + 2]$ 來運算，而它的餘式 $4x - 10$ 的次數 1 低於除式 $x^2 - 3x + 2$ 的次數 2，即完成多項式除法運算。

從(3)題②發現：

作 $(3x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + x + 1)$ 運算時，

因為 $2x^2 \cdot \frac{3}{2} = 3x^2$ ，決定商式為 $\frac{3}{2}$ ，

即 $(3x^2 + 2x + 1) - (2x^2 + x + 1) \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ，而它的餘式 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的次數一次低於除式 $2x^2 + x + 1$ 的次數二次，即完成多項式除法運算，所以接受商式、餘式為含分數係數的多項式。



(7)①請利用直式除法計算 $(4x^2 + 3) \div (2x^2 + 2x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

②請利用直式除法計算 $(2x^2 - 3x - 5) \div (x^2 + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

①

被除式 $4x^2 + 3$ 缺 x 項，補一個 0，記為 $4x^2 + 0 + 3$ ，

進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 2x^2 + 2x + 1 \overline{) 4x^2 + 0 + 3} \\
 \underline{4x^2 + 4x + 2} \\
 (-4)x + 1
 \end{array}$$

所以 $(4x^2 + 2x + 1) \div (2x^2 + 2x + 1)$ 的商為 2，餘式為 $4x + (-5) = 4x - 5$ 。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～12 頁的教學重點在幫助學生利用長除法作多項式除法運算。
2. 本頁對話框在幫助學生從第(6)題發現多項式的除法之餘式次數必低於除式次數，才完成多項式除法運算，另外，也接受商式、餘式為含分數係數的多項式。
3. 第(7)題含有兩個子問題，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。

子問題①： $(4x^2 + 3) \div (2x^2 + 2x + 1)$

子問題②： $(2x^2 - 3x - 5) \div (x^2 + 1)$

子問題①方法：因為 $4x^2 + 3$ 遇缺項補 0，教師先幫助學生改記成 $4x^2 + 0 + 3$ ，

接著比較 $4x^2 + 0 + 3$ 與 $2x^2 + 2x + 1$ 兩式的最高次項係數與次數，

應在商式寫 2，進行長除法運算，得到 $-4x + 1$ ，最後要求學生寫出商式 2，

餘式 $-4x + 1$ 。

- 本頁引入第(7)題的目的除了幫助學生熟練二次多項式除以二次多項式的運算，也提醒學生多項式除法運算中，如遇缺項補 0 的步驟，在長除法次方順序位置正確，才能正確算出合理的商式與餘式。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

②

將被除式 $2x^2 - 3x - 5$ 記為 $2x^2 + (-3)x + (-5)$ ；

除式 $x^2 + 1$ 缺 x 項，補一個 0，記為 $x^2 + 0 + 1$ ，

進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r} \overline{2x^2 + (-3)x + (-5)} \\ \underline{2x^2 + 0x + 2} \\ (-3)x + (-7) \end{array}$$

所以 $(2x^2 - 3x - 5) \div (x^2 + 1)$ 的商式為 2，餘式為 $(-3)x + (-7) = -3x - 7$ 。

(8) 請利用直式除法計算 $(3x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

直式除法過程如下：

$$\begin{array}{r} \overline{3x^2 + 4x + 1} \\ \underline{3x^2 + 3x} \\ x + 1 \\ \underline{x + 1} \\ 0 \end{array}$$

$x \cdot 3x = 3x^2$ $x \cdot 1 = x$
 $3x + 1$
 $(x+1) \cdot 3x$
 $(x+1) \cdot 1$

所以 $(3x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ 的商式為 $3x + 4$ ，餘式為 0。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～12 頁的教學重點在幫助學生利用長除法作多項式除法運算。
2. 第(4)題含有兩個子問題，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。

子問題①： $(4x^2+3) \div (2x^2+2x+1)$

子問題②： $(2x^2-3x-5) \div (x^2+1)$

子問題②方法：因為 x^2+1 遇缺項補 0，教師先幫助學生改記成 x^2+0+1 ，

接著比較 $2x^2-3x-5$ 與 x^2+0+1 兩式的最高次項係數與次數，

應在商式寫 2，進行長除法運算，得到 $-3x-7$ ，

最後要求學生寫出商式 2，餘式 $-3x-7$ 。

3. 第(8)題給定 $(3x^2+4x+1) \div (x+1)$ ，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。

教師先幫助學生比較 $3x^2+4x+1$ 與 $x+1$ 兩式的最高次項係數與次數，應在商式寫 $3x$ ，進行長除法運算，得到 $x+1$ ，再比較 $x+1$ 和 $x+1$ 兩式的最高次項係數與次數，應在商式寫 1，進行長除法運算，得到 0，最後要求學生寫出商式 $3x+1$ ，餘式 0。

- 本頁引入第(8)題的目的幫助學生熟練二次多項式除以一次多項式的運算，如果學生不知道如何寫商式，教師可以先利用含有括號的乘法算式，比較兩多項式的最高次項係數與次數，要求學生填入適當的多項式，例如：「比較 $3x^2+4x+1$ 與 $x+1$ 兩式的最高次項係數與次數， $x \cdot (\quad) = 3x^2$ ，應填入多少？」應填入 $3x$ ，所以在商式寫入 $3x$ 接著幫助學生計算 $(x+1) \cdot 3x$ ，將結果寫入長除法對應的位置，進行長除法運算。
- 本頁引入第(5)題 $(3x^2+4x+1) \div (x+1)$ 的餘式為 0，可類比數的除法運算之整除的概念。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

(9)① 請計算 $(4x^2 - 2x + 6) \div (2x - 3)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

② 請計算 $(5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

解：

① 將被除式 $4x^2 - 2x + 6$ 記為 $4x^2 + (-2)x + 6$ ；

除式 $2x - 3$ 記為 $2x + (-3)$ ，進行直式除法，過程如下所示：

$$\begin{array}{r}
 2x + 2 \\
 2x + (-3) \overline{) 4x^2 + (-2)x + 6} \\
 \underline{4x^2 + (-6)x} \\
 4x + 6 \\
 \underline{4x + (-6)} \\
 12
 \end{array}$$

所以 $(4x^2 - 2x + 6) \div (2x - 3)$ 的商式為 $2x + 2$ ，餘式為 12 。

② 直式除法過程如下：

$$\begin{array}{r}
 2x \cdot \frac{5}{2}x = 5x^2 \qquad 2x \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}x \\
 \searrow \qquad \qquad \qquad \nearrow \\
 \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} \\
 2x + 1 \overline{) 5x^2 + 4x + 1} \\
 \underline{5x^2 + \frac{5}{2}x} \qquad \leftarrow (2x+1) \cdot \frac{5}{2}x \\
 \frac{3}{2}x + 1 \\
 \underline{\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}} \qquad \leftarrow (2x+1) \cdot \frac{3}{4}x \\
 \frac{1}{4}
 \end{array}$$

所以 $(5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$ 的商式為 $\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}$ ，餘式為 $\frac{1}{4}$ 。



教材內容說明：

1. 本教材第 6～12 頁的教學重點在幫助學生利用長除法作多項式除法運算。
2. 第(9)題含有兩個子問題，要求學生計算各式的結果，並寫出商式與餘式。

子問題①： $(4x^2 - 2x + 6) \div (2x - 3)$

子問題②： $(5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$

子問題①方法：教師先幫助學生比較 $4x^2 - 2x + 6$ 與 $2x - 3$ 兩式的最高次項係數與次數，

應在商式寫 $2x$ ，進行長除法運算，得到 $4x + 6$ ，再比較 $4x + 6$ 和 $2x - 3$ 兩式的最高次項係數與次數，應在商式寫 2 ，進行長除法運算，得到 12 ，最後要求學生寫出商式 $2x + 2$ ，餘式 12 。

子問題②方法：教師先幫助學生比較 $5x^2 + 4x + 1$ 與 $2x + 1$ 兩式的最高次項係數與次數，

應在商式寫 $\frac{5}{2}x$ ，進行長除法運算，得到 $\frac{3}{2}x + 1$ ，再比較 $\frac{3}{2}x + 1$ 和 $2x + 1$ 兩式的最高次項係數與次數，應在商式寫 $\frac{3}{4}$ ，進行長除法運算，得到 $\frac{1}{4}$ ，最後要求學生寫出商式 $\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}$ ，餘式 $\frac{1}{4}$ 。

- 本頁引入第(6)題的目的除了幫助學生熟練多項式的除法運算外，遇到二次被除式的最高次項係數不是一次除式的整數倍，教師可以先利用含有括號的乘法算式，比較兩多項式的最高次項係數與次數，要求學生填入適當的係數，例如：「比較 $4x^2 - 2x + 6$ 與 $2x - 3$ 兩式的最高次項係數與次數 $2x \cdot () = 5x^2$ ，括號內應填入多少？」來幫助學生寫出商式，並進行長除法運算。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算



隨堂練習

(1) 計算下列各式的結果，並寫出商式與餘式：

① $(35x+10) \div 5x$

② $(15x^2 - 8x - 12) \div (3x + 2)$

③ $(8x^2 - 11) \div (2x - 5)$

④ $(12x^2 + 2x - 1) \div (3x + 1)$

答：① 商式為 7，餘式為 10

② 商式為 $5x - 6$ ，餘式為 0

③ 商式為 $4x + 10$ ，餘式為 39

④ 商式為 $4x - \frac{2}{3}$ ，餘式為 $-\frac{1}{3}$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6～12 頁的教學重點在幫助學生利用長除法作多項式除法運算。
2. 本頁隨堂練習：

第(1)題含有四個子問題，要求學生計算各式的結果，並寫出商式與餘式。

子問題①： $(35x+10) \div 5x$

子問題②： $(15x^2 - 8x - 12) \div (3x + 2)$

子問題③： $(8x^2 - 11) \div (2x - 5)$

子問題④： $(12x^2 + 2x - 1) \div (3x + 1)$



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

◎多項式除法原理

① 已知桌面上有 605 顆糖果，每 20 顆裝一包，可裝幾包？桌面上剩下幾顆？

② 605 和 $20 \times 30 + 5$ 一樣大嗎？

解：① $605 \div 20 = 30 \cdots 5$ ，所以可裝 30 包，剩下 5 顆。

② 從①知道，每 20 顆裝一包，裝 30 包，剩下 5 顆，
總顆數為 $20 \times 30 + 5 = 605$ ，共 605 顆，
所以 605 和 $20 \times 30 + 5$ 一樣大。

「被除數 \div 除數 = 商數 \cdots 餘數」，記為 $a \div b = q \cdots r$ ，
而「被除數 = 除數 \times 商數 + 餘數」，改記為 $a = b \cdot q + r = bq + r$ ，
我們稱之為整數除法原理。



(10) ① 請問 $(x^2 + 4x + 5)$ 和 $(x - 3)(x + 7) + 26$ 是否相等？

② $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$ ，請用請用乘法與加法算式紀錄。

解：

①

$$\begin{aligned} & (x^2 + 4x + 5) - [(x - 3)(x + 7) + 26] \\ &= (x^2 + 4x + 5) - (x^2 + 4x + 5) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } x^2 + 4x + 5 = (x - 3)(x + 7) + 26。$$

② 因為 $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$

$$\text{改記為 } (x^2 + 4x + 5) = (x - 3)(x + 7) + 26$$

多項式除法算式 $A \div B = Q \cdots R$ ，可記為 $A = BQ + R$ ，其中 A 為被除式， B 為除式， Q 為商式， R 為餘式，我們稱之為多項式除法原理。例如： $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$ ，
除法算式與結果可改記成 $(x^2 + 4x + 5) = (x - 3)(x + 7) + 26$ 。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 13～15 頁的教學重點在幫助學生理解多項式的除法原理。

2. 複習題含有兩個子問題，

子問題①：給定 605 顆糖果，每 20 顆裝一包，要求學生計算可裝包數。

子問題②：比較 605 和 $20 \times 30 + 5$ 是否相等。

子問題①方法： $605 \div 20 = 30 \cdots 5$ ，所以可裝 30 包，剩下 5 顆。

子問題②方法：利用每 20 顆裝一包，裝 30 包，剩下 5 顆，計算總顆數為 $20 \times 30 + 5$ ，

共 605 顆，故說明 605 和 $20 \times 30 + 5$ 相等。

3. 本頁對話框在幫助學生將數的除法運算，改記成乘法與加法算式，即 $a \div b = q \cdots r$ 改記成 $a = b \cdot q + r = bq + r$ ，也將這樣的過程稱為除法原理。

4. 第(10)題含有兩個子問題，

子問題①：比較 $(x^2 + 4x + 5)$ 和 $(x - 3)(x + 7) + 26$ 的結果是否相等。

子問題②：用除法原理改記 $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$ 。

子問題①方法：教師先幫助學生複習多項式乘法與加法運算，再利用多項式減法比較

$(x^2 + 4x + 5)$ 和 $(x - 3)(x + 7) + 26$ 兩式結果是否相等，如果兩式相減等於 0，

表示兩式相等；反之，表示兩式不相等。

子問題②方法：教師將 $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 3) = (x + 7) \cdots 26$ 類比數的除法運算，幫助學生利用

「被除式 \div 除式 = 商式 \cdots 餘式」，而「被除式 = 除式 \times 商式 + 餘式」，來改記

成 $x^2 + 4x + 5 = (x - 3)(x + 7) + 26$ 。

5. 本頁對話框幫助學生將多項式的除法運算，改記成乘法與加法算式，即 $A \div B = Q \cdots R$ 改記成 $A = BQ + R$ ，稱為多項式的除法原理。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

(11) 已知 $(2x^2 - x - 5) \div (x - 2) = 2x + 3 \cdots 1$ ，請問下列哪個敘述正確？

正確敘述請畫○，錯誤敘述請畫×。

_____ ① $(2x^2 - x - 5) = (x - 2)(2x + 3) + 1$

_____ ② $2x^2 - x - 5 = (x - 2)(2x + 3) - 1$

_____ ③ $2x^2 - x - 5 = -(x - 2)(2x + 3) + 1$

解：

$$(2x^2 - x - 5) \div (x - 2) = 2x + 3 \cdots 1,$$

$$\text{可記為 } 2x^2 - x - 5 = (x - 2)(2x + 3) + 1,$$

$$\text{移項得 } (2x^2 - x - 5) - (x - 2)(2x + 3) = 1,$$

$$\text{或是 } (2x^2 - x - 5) - 1 = (x - 2)(2x + 3)。$$

所以

○ ① $(2x^2 - x - 5) - (x - 2)(2x + 3) = 1$

○ ② $2x^2 - x - 5 = (x - 2)(2x + 3) + 1$

× ③ $(2x^2 - x - 5) + 1 = (x - 2)(2x + 3)$

(12) 已知 $3x^2 + 5x - 7 = (3x + 2)(x + 1) + (-9)$ ，

在 $(3x^2 + 5x - 7) \div (3x + 2) = Q \cdots R$ 中，請問多項式 Q ， R 分別為多少？

解：

$$3x^2 + 5x - 7 = (3x + 2)(x + 1) + (-9)$$

$$3x^2 + 5x - 7 - (3x + 2)(x + 1) = -9$$

表示 $3x^2 + 5x - 7$ 比 $3x + 2$ 的 $x + 1$ 倍多 -9 ，

也就是說， $3x^2 + 5x - 7$ 除以 $3x + 2$ ，會得商式為 $x + 1$ ，餘式為 -9 。

所以 $Q = x + 1$ ， $R = -9$ 。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 13～15 頁的教學重點在幫助學生理解多項式的除法原理。
2. 第(11)題給定 $(2x^2 - x - 5) \div (x - 2) = 2x + 3 \cdots 1$ ，要求學生選出除法原理正確的算式。
 - 本頁引入第(11)題的目的在幫助學生檢驗是否理解除法原理的概念。
3. 第(12)題給定 $3x^2 + 5x - 7 = (3x + 2)(x + 1) + (-9)$ ，對照 $(3x^2 + 5x - 7) \div (3x + 2) = Q \cdots R$ ，要求學生寫出正確的商式 Q 與餘式 R 。

教師先幫助學生計算 $3x^2 + 5x - 7 - (3x + 2)(x + 1)$ ，得到 -9 ，再說明 $3x^2 + 5x - 7$ 比 $3x + 2$ 的 $x + 1$ 倍多 -9 ，也就是說， $3x^2 + 5x - 7$ 除以 $3x + 2$ ，會得商式為 $x + 1$ ，餘式為 -9 ，所以 $Q = x + 1$ ， $R = -9$ 。

- 本頁引入第(12)題的目的在幫助學生熟練利用除法原理解題的能力。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算

(13) 已知 $A \div (x-3) = 2x+1 \cdots 4$ ，請問多項式 A 為多少？

解：

由除法原理知道

$$A = (x-3)(2x+1) + 4$$

$$= 2x^2 - 5x - 3 + 4$$

$$= 2x^2 - 5x + 1$$

所以多項式 $A = 2x^2 - 5x + 1$ 。



隨堂練習

(1) 已知 $2x^2 - 5x + 8 = (x-4)(2x+3) + 4$ ，

在 $(2x^2 - 5x + 8) \div (x-4) = Q \cdots R$ 中，請問多項式 Q ， R 分別為多少？

答： $Q = 2x+3$ ， $R = 4$

(2) 已知 $A \div (2x+3) = 4x-1 \cdots 7$ ，請問多項式 A 為多少？

答： $A = 8x^2 + 10x + 4$



教材內容說明：

1. 本教材第 13～15 頁的教學重點在幫助學生理解多項式的除法原理。
2. 第(13)題給定 $A \div (x-3) = 2x+1 \cdots 4$ ，要求學生利用除法原理寫出正確的被除式。

教師先幫助學生利用除法原理將 $A \div (x-3) = 2x+1 \cdots 4$ 改記成 $A = (x-3)(2x+1)+4$ ，再進行多項式乘法與加法運算，得到 $A = 2x^2 - 5x + 1$ 。

● 本頁引入第(4)題的目的在幫助學生熟練利用除法原理解題的能力。

3. 本頁隨堂練習：

第(1)題給定 $2x^2 - 5x + 8 = (x-4)(2x+3) + 4$ ，

$(2x^2 - 5x + 8) \div (x-4) = Q \cdots R$ ，要求學生寫出正確的多項式 Q 、 R 。

第(2)題給定 $A \div (2x+3) = 4x-1 \cdots 7$ ，要求學生算出正確的多項式 A 。



基本學習內容：AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算



小試身手

(1) 計算 $(4x^2 + 20x - 5) \div 4x$ 的結果，並寫出商式與餘式。

答：商式為 $x + 5$ ，餘式為 -5

(2) 計算 $(6x^2 + 5x - 7) \div (2x - 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

答：商式為 $3x + 4$ ，餘式為 -3

(3) 計算 $(9x^2 + 8) \div (3x + 1)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

答：商式為 $3x - 1$ ，餘式為 9

(4) 計算 $(6x^2 - 8x + 3) \div (2x - 3)$ 的結果，並寫出商式與餘式。

答：商式為 $3x + \frac{1}{2}$ ，餘式為 $\frac{9}{2}$

(5) 如果多項式 A 除以 $3x - 4$ 得商式 $x + 3$ ，餘式為 9 ，請問多項式 A 為多少？

答： $A = 3x^2 + 5x - 3$

**教材內容說明：**

1. 本教材第 16 頁為小試身手。
2. 第(1)題給定 $(4x^2 + 20x - 5) \div 4x$ ，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。
3. 第(2)題給定 $(6x^2 + 5x - 7) \div (2x - 1)$ ，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。
4. 第(3)題給定 $(9x^2 + 8) \div (3x + 1)$ ，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。
5. 第(4)題給定 $(6x^2 - 8x + 3) \div (2x - 3)$ ，要求學生計算出結果，並寫出商式與餘式。
6. 第(5)題給定多項式 A 除以 $3x - 4$ 得商式 $x + 3$ ，餘式為 9，要求學生算出正確的多項式 A 。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

