

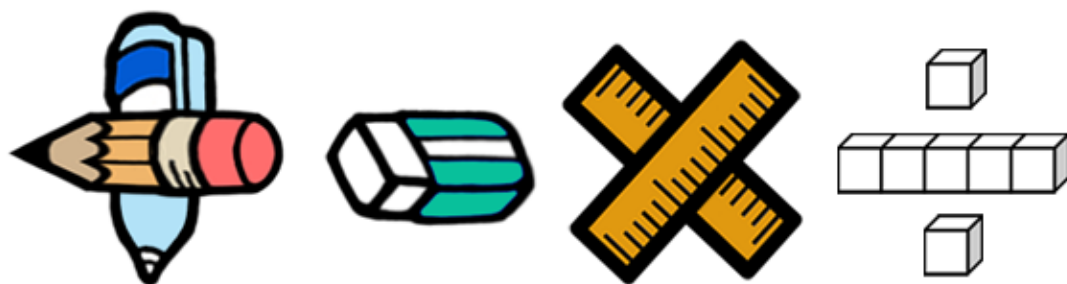
# 基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

提公因式作整係數二次多項式的因式分解

乘法公式作整係數二次多項式的因式分解

十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

【教師用】





基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

### 學習內容：

**A-8-5 因式分解的方法：**提公因式法；利用乘法公式與十字交乘因式分解。

**備註：**只處理整係數  $ax^2+bx+c$  的因式分解或與乘法公式直接相關者，

不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。

### 基本學習內容：

AC-8-5-1 提公因式作整係數二次多項式的因式分解。

AC-8-5-2 乘法公式作整係數二次多項式的因式分解。

AC-8-5-3 十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解。

### 基本學習表現：

ACP-8-5-1-1 能認識兩個整係數多項式(至多二次) 的公因式。

(公因式亦限制為整係數)。

ACP-8-5-1-2 能判別兩個整係數多項式(至多二次) 的公因式。

(公因式亦限制為整係數)。

ACP-8-5-1-3 能利用提出整係數的公因式作整係數二次多項式的因式分解。

ACP-8-5-2-1 能用乘法公式因式分解整係數二次多項式。

ACP-8-5-3-1 能用十字交乘法因式分解整係數二次多項式。



**概要說明：**

◎基本學習內容AC-8-5-1為AC-8-4-2之後續學習概念，學生應該已理解多項式因式分解的意義。

■ 學生已學會利用分配律將  $78 \times (99 + 1)$  化為  $78 \times 99 + 78 \times 1 = 78 \times 99 + 78$ ，

也能將  $78 \times 99 + 78$  化簡為  $78 \times (99 + 1)$  幫助計算。

我們利用分配律引導學生看到多項式用提出公因式的方法因式分解。

■ 讓學生了解形如  $b - a$  值的相反數  $-(b - a)$  轉換方法，未來會有助於某些多項式的因式分解以及後續學習，列入教學活動讓學生對此形式的轉換確實掌握。

◎基本學習內容AC-8-5-2為AC-8-1-1及AC-8-4-2之後續學習概念，學生應該已理解二次式的乘法公式及多項式因式分解的意義。

■ 使用完全平方公式  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  或平方差公式

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  因式分解的題目，限制  $a$  或  $b$  只能採用  $x$  的單項式或常數，不宜評量形如  $(x - 2)^2 - 4(x - 2) + 4$  的因式分解。

■ 若學生不熟悉乘法公式，建議改用十字交乘法解題。

◎基本學習內容AC-8-5-3為AC-8-5-2之後續學習概念，學生應該已理解多項式因式分解的意義。

■ 本基本學習內容只處理二次項係數是正的整係數多項式之因式分解。

■ 十字交乘法學習內容的安排，建議從二次項係數為1，再到二次項係數是其它正整數。

■ 建議先跟學生示範以下的多項式乘法展開式，理解用十字交乘法因式分解時常數項分解兩數乘積的正負數類型。

假設  $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$ ，

例如： $x^2 + 6x + 8$  可分解成  $(x + 2)(x + 4)$ ，得到  $p$ 、 $q$  皆為正

例如： $x^2 - 6x + 8$  可分解成  $(x - 2)(x - 4)$ ，得到  $p$ 、 $q$  皆為負

例如： $x^2 + 2x - 8$  可分解成  $(x - 2)(x + 4)$ ，因常數項為負，

所以  $p$ 、 $q$  為性質符號相異的兩數。

■ 十字交乘時，常數項除了考慮數字大小外，也要注意不要可多組分解的數，如60、80、120...，或不要兩個較大質數乘積，如  $209 = 11 \times 19$ ，重點在習得十字交乘的方法，而不是為難學生。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

## ◎提公因式作整係數二次多項式的因式分解

## 複習分配律

(1) 已知  $23 \times (97 + 3) = 23 \times 97 + 23 \times 3$ 。利用分配律計算  $78 \times 99 + 78 \times 1$  的結果。解：觀察  $23 \times (97 + 3) = \boxed{23} \times 97 + \boxed{23} \times 3$ ，

我發現，等號左邊的算式是將等號右邊算式中 23 提出後的結果。

把  $\boxed{78} \times 99 + \boxed{78} \times 1$  看成以加號連接的兩個算式，將 78 提出來，

兩個算式剩下的數以( )合併，原算式改寫為兩個數相乘，

$$78 \times 99 + 78 \times 1 = 78 \times (99 + 1) = 78 \times 100 = 7800。$$

(2) 已知  $52 \times (219 - 19) = 52 \times 219 - 52 \times 19$ 。利用分配律計算  $86 \times 123 - 86 \times 23$  的結果。解：觀察  $52 \times (219 - 19) = \boxed{52} \times 219 - \boxed{52} \times 19$ ，

我發現，等號左邊的算式是將等號右邊算式中 52 提出後的結果。

把  $\boxed{86} \times 123 - \boxed{86} \times 23$  看成以減號連接的兩個算式，將 86 提出來，

兩個算式剩下的數以( )合併，原算式改寫為兩個數相乘，

$$86 \times 123 - 86 \times 23 = 86 \times (123 - 23) = 86 \times 100 = 8600。$$

## 重點整理

像這樣的等式： $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$ ，就稱為分配律。例如： $\boxed{23} \times (97 \oplus 3) = \boxed{23} \times 97 \oplus \boxed{23} \times 3$ 、 $\boxed{52} \times (219 \ominus 19) = \boxed{52} \times 219 \ominus \boxed{52} \times 19$



**教材內容說明：**

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解提公因式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 本頁教材內容在複習分配律。

第(1)題給定  $23 \times (97 + 3) = 23 \times 97 + 23 \times 3$ ，要求學生利用分配律計算  $78 \times 99 + 78 \times 1$  的結果。

教師幫助學生看到給定算式等號右邊的  $23 \times 97$  和  $23 \times 3$  有公因數 23，等號左邊則是將公因數 23 提出，與剩下的數相加後再相乘的結果。

接著引導學生計算  $78 \times 99 + 78 \times 1$  時，先提出  $78 \times 99$  和  $78 \times 1$  的公因數 78，再將剩下的數相加，將算式整理得  $78 \times (99 + 1)$  後再算出答案。

3. 第 (2) 題 給 定  $52 \times (219 - 19) = 52 \times 219 - 52 \times 19$ ，要求學生利用分配律計算  $86 \times 123 - 86 \times 23$  的結果。

教師幫助學生看到給定算式等號右邊的  $52 \times 219$  和  $52 \times 19$  有公因數 52，等號左邊則是將公因數 52 提出，與剩下的數相減後再相乘的結果。

接著引導學生計算  $86 \times 123 - 86 \times 23$  時，先提出  $86 \times 123$  和  $86 \times 23$  的公因數 86，再將剩下的數相減，將算式整理得  $86 \times (123 - 23)$  後再算出答案。

4. 本頁下方重點整理框在說明像這樣  $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$  就稱為分配律。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

### 提公因式作因式分解

(3) ①說說看，23 是「 $23 \times 66 + 23 \times 33$ 」的因數嗎？  
 $(66+33)$ 也是「 $23 \times 66 + 23 \times 33$ 」的因數嗎？

②說說看， $a$  是「 $a \times 66 + a \times 33$ 」的因數嗎？  
 $(66+33)$ 也是「 $a \times 66 + a \times 33$ 」的因數嗎？

解：①我知道，利用分配律可得  $23 \times 66 + 23 \times 33 = 23 \times (66 + 33)$

所以 23 和  $(66+33)$  都是「 $23 \times 66 + 23 \times 33$ 」的因數。

②我知道，利用分配律可得  $a \times 66 + a \times 33 = a \times (66 + 33)$ ，

所以  $a$  和  $(66+33)$  都是「 $a \times 66 + a \times 33$ 」的因數。

(4) ①說說看， $x$  是「 $3x \cdot x + 2 \cdot x$ 」的因式嗎？

$(3x+2)$ 也是「 $3x \cdot x + 2 \cdot x$ 」的因式嗎？

②說說看， $(x+1)$ 是「 $(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3)$ 」的因式嗎？

$(2x+5)$ 也是「 $(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3)$ 」的因式嗎？

解：

①我知道，利用分配律可得  $3x \cdot x + 2 \cdot x = x(3x + 2)$ ，

所以  $x$  和  $(3x+2)$  都是  $3x \cdot x + 2 \cdot x$  的因式。

②我知道，利用分配律可得

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) \\ &= (x+1) \cdot (x+2) + (x+1) \cdot (x+3) \\ &= (x+1) \cdot [(x+2) + (x+3)] = (x+1)(2x+5) \end{aligned}$$

所以  $(x+1)$  和  $(2x+5)$  都是「 $(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3)$ 」的因式。





### 教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解提公因式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 第(3)題包含 2 個子問題。

子問題①：給定  $a = 23 \times 66 + 23 \times 33$ ，要求學生判斷 23 和  $(66+33)$  是否為  $a$  的因數。

教師引導學生利用分配律提出公因數 23，

將  $a$  改寫為  $a = 23 \times (66 + 33)$ ，所以 23 和  $(66+33)$  都是  $a$  的因數。

子問題②：給定  $a \times 66 + a \times 33$ ，要求學生判斷  $a$  和  $(66+33)$  是否為

$a \times 66 + a \times 33$  的因數。

教師引導學生利用分配律提出公因數  $a$ ，

將原式改寫為  $a \times (66 + 33)$ ，所以  $a$  和  $(66+33)$  都是它的因數。

3. 第(4)題包含 2 個子問題。

子問題①：給定多項式  $3x \cdot x + 2 \cdot x$ ，要求學生判斷  $x$  和  $(3x + 2)$  是否為

$3x \cdot x + 2 \cdot x$  的因數。

教師幫助學生看到  $3x \cdot x$  和  $2 \cdot x$  有公因式  $x$ ，先提出公因式  $x$ ，再合併多項式，

將原式整理得  $x(3x + 2)$ ，所以  $x$  和  $(3x + 2)$  都是它的因數。

子問題②：給定多項式  $(x + 1)(x + 2) + (x + 1)(x + 3)$ ，要求學生判斷  $(x + 1)$  和  $(2x + 5)$

是否為  $(x + 1)(x + 2) + (x + 1)(x + 3)$  的因數。

教師幫助學生看到  $(x + 1)(x + 2)$  和  $(x + 1)(x + 3)$  有公因式  $(x + 1)$ ，

先提出公因式  $(x + 1)$ ，再合併多項式，將原式整理得  $(x + 1)(2x + 5)$ ，

所以  $(x + 1)$  和  $(2x + 5)$  都是它的因數。

- 教師幫助學生只要看到  $a \times b + a \times c$ ，就可以說  $a$  和  $b + c$  都是它的因數。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

### 重點整理

像這樣透過分配律先把公因式提出，將多項式改寫成兩個一次因式的乘積，就稱為提公因式作因式分解。

例如： $3x \cdot x + 2 \cdot x = x(3x + 2)$

$$(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) = (x+1)(2x+5)$$

(5)利用提公因式法因式分解下列各式：

①  $(x-3)(2x+1) + (x-2)(2x+1)$ 。

②  $2x^2 - 3x$ 。

解：

$$\begin{aligned} \text{① } & (x-3)(2x+1) + (x-2)(2x+1) \\ &= (x-3) \cdot (2x+1) + (x-2) \cdot (2x+1) \\ &= [(x-3) + (x-2)] \cdot (2x+1) \\ &= (2x-5)(2x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } & 2x^2 - 3x \\ &= x \cdot 2x + x \cdot (-3) \\ &= x \cdot [2x + (-3)] \end{aligned}$$





### 教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解提公因式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 本頁上方重點整理框在說明「先把公因式提出，將多項式改寫成兩個一次因式的乘積」，就是「提公因式作因式分解」。
3. 第(5)題要求學生利用提公因式法因式分解 2 個子問題。

子問題①：給定  $(x - 3)(2x + 1) + (x - 2)(2x + 1)$ 。

教師幫助學生看到  $(x - 3)(2x + 1)$  和  $(x - 2)(2x + 1)$  有公因式  $(2x + 1)$ ，

先提出公因式  $(2x + 1)$ ，再合併多項式，所以因式分解為  $(2x - 5)(2x + 1)$ 。

子問題②：給定  $2x^2 - 3x$ 。

教師幫助學生先將  $2x^2 - 3x$  改寫為  $x \cdot 2x + x \cdot (-3)$ ，看到  $x \cdot 2x$  和  $x \cdot (-3)$  有共

同的因式  $x$ ，先提出公因式  $x$ ，再合併多項式，所以因式分解為  $x(2x - 3)$ 。

- 如果學生在提出公因式後的多項式合併有困難，建議教師多舉一些例子讓學生看到合併的過程，或提供 AC-8-3-1 教材讓學生練習。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

- (6) ①說說看，17 是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數嗎？  
 $(31-20)$ 也是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數嗎？
- ②說說看， $(31-20)$ 是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數嗎？  
 $a$ 也是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數嗎？

解：

①方法一：利用分配律可得  $31 \times 17 - 20 \times 17 = (31 - 20) \times 17$

所以 17 和  $(31-20)$  都是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數。

方法二：  $31 \times 17 - 20 \times 17$

$$= 31 \times 17 + (-20) \times 17$$

$$= [31 + (-20)] \times 17$$

$$= (31 - 20) \times 17$$

所以  $(31-20)$  和 17 都是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數。

②利用分配律，得到  $31 \times a - 20 \times a = (31 - 20) \times a$ ，

所以  $(31-20)$  和  $a$  都是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數。



### 教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解提公因式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 第(6)題引入提公因式後進行減法運算作因式分解，包含 2 個子問題。

子問題①：要求學生判斷 17 和  $(31-20)$  是否為「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數。

本教材提供兩種解法：

方法一：直接提出公因數 17，將原式化簡為  $(31-20) \times 17$ ，

所以 17 和  $(31-20)$  都是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數。

方法二：將原式改寫為  $31 \times 17 + (-20) \times 17$ ，再提出公因數 17，化簡為  $(31-20) \times 17$ ，

所以 17 和  $(31-20)$  都是「 $31 \times 17 - 20 \times 17$ 」的因數。

子問題②：要求學生判斷  $(31-20)$  和  $a$  是否為「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數。

教師引導學生利用分配律提出公因數  $a$ ，將原式改寫為  $(31-20) \times a$ ，所以  $(31-20)$  和  $a$  都是「 $31 \times a - 20 \times a$ 」的因數。

● 教師幫助學生只要看到  $a \times b + a \times c$ ，就可以說  $a$  和  $b + c$  都是它的因數。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(7)①說說看， $x$  是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式嗎？

$(3x - 5)$  也是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式嗎？

②說說看， $(x + 1)$  是「 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 」的因式嗎？

$(x + 4)$  也是「 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 」的因式嗎？

解：

①方法一：利用分配律可得  $3x \cdot x - 5 \cdot x = (3x - 5) \cdot x = x(3x - 5)$

所以  $x$  和  $(3x - 5)$  都是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式。

方法二：因為  $3x \cdot x - 5 \cdot x = 3x \cdot x + (-5) \cdot x$ ，

再利用分配律可得

$$3x \cdot x + (-5) \cdot x = [3x + (-5)] \cdot x = x(3x - 5)$$

所以  $x$  和  $(3x - 5)$  都是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式。

②我知道，利用分配律可得

$$\begin{aligned} & (x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3) \\ &= (x + 1) \cdot (2x + 7) - (x + 1) \cdot (x + 3) \\ &= (x + 1)[(2x + 7) - (x + 3)] \\ &= (x + 1)(x + 4) \end{aligned}$$

所以  $(x + 1)$  和  $(x + 4)$  都是「 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 」的因式。



### 教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解提公因式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 第(7)題包含 2 個子問題。

子問題①：要求學生判斷 $x$ 和 $(3x - 5)$ 是否為「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因數。

本教材提供兩種解法：

方法一：教師幫助學生看到 $3x \cdot x$ 和 $5 \cdot x$ 有共同的因式 $x$ ，先提出公因式 $x$ ，再合併多項式，將原式改寫為 $x(3x - 5)$ ，所以 $x$ 和 $(3x - 5)$ 都是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式。

方法二：教師先引導學生將原式改寫為 $3x \cdot x + (-5) \cdot x$ ，再幫助學生看到 $3x \cdot x$ 和 $(-5) \cdot x$ 有共同的因式 $x$ ，接著提出公因式 $x$ ，然後合併多項式，將原式改寫為 $x(3x - 5)$ ，所以 $x$ 和 $(3x - 5)$ 都是「 $3x \cdot x - 5 \cdot x$ 」的因式。

子問題②：要求學生判斷 $(x + 1)$ 和 $(x + 4)$ 是否為「 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 」的因數。教師幫助學生看到 $(x + 1)(2x + 7)$ 和 $(x + 1)(x + 3)$ 有共同的因式 $(x + 1)$ ，先提出公因式 $(x + 1)$ ，再合併多項式，將原式整理得 $(x + 1)(x + 4)$ ，所以 $(x + 1)$ 和 $(x + 4)$ 都是「 $(x + 1)(2x + 7) - (x + 1)(x + 3)$ 」的因數。

- 如果學生無法處理子問題②的運算過程，建議教師幫助學生回到子問題①的方法二解題。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(8)利用提公因式法因式分解下列各式：

$$\textcircled{1} (5x + 6)(x - 3) - (2x + 5)(x - 3)。$$

$$\textcircled{2} -2x^2 - 7x。$$

解：

$$\begin{aligned}\textcircled{1} & (5x + 6)(x - 3) - (2x + 5)(x - 3) \\ &= [(5x + 6) - (2x + 5)] \cdot (x - 3) = (3x + 1)(x - 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} & -2x^2 - 7x \\ &= x \cdot (-2x) - x \cdot 7 = x \cdot [(-2x) - 7] = x(-2x - 7)\end{aligned}$$

(9)因式分解下列各式：

$$\textcircled{1} (x + 2)(3x + 5) - (x + 2)(2x + 3)。$$

$$\textcircled{2} (2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3)。$$

$$\textcircled{3} (-5x + 3)(2x - 1) - (1 - 2x)(x + 5)$$

解：

$$\textcircled{1} (x + 2)(3x + 5) - (x + 2)(2x + 3) = (x + 2)[(3x + 5) - (2x + 3)] = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} (2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3) &= (2x + 1)(2x + 1) + (2x + 1)(x - 3) \\ &= (2x + 1)[(2x + 1) + (x - 3)] = (2x + 1)(3x - 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} (-5x + 3)(2x - 1) - (1 - 2x)(x + 5) &= (-5x + 3)(2x - 1) - [-(2x - 1)](x + 5) \\ &= (-5x + 3)(2x - 1) + (2x - 1)(x + 5) \\ &= (2x - 1)[(-5x + 3) + (x + 5)] \\ &= (2x - 1)(-4x + 8)\end{aligned}$$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 1～6 頁的教學重點是幫助學生理解提公因式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 第(8)題要求學生利用提公因式法因式分解多項式，包含 2 個子問題。

子問題①：給定  $(5x + 6)(x - 3) - (2x + 5)(x - 3)$ 。

教師幫助學生看到公因式  $(x - 3)$ ，先提出  $(x - 3)$ ，

再合併多項式，所以因式分解為  $(3x + 1)(x - 3)$ 。

子問題②：給定  $-2x^2 - 7x$ 。

教師幫助學生先將  $-2x^2 - 7x$  改寫為  $x \cdot (-2x) - x \cdot 7$ ，

看到  $x \cdot (-2x)$  和  $x \cdot 7$  有共同的因式  $x$ ，先提出公因式  $x$ ，

再合併多項式，所以因式分解為  $x(-2x - 7)$ 。

3. 第(9)題要求學生因式分解多項式，包含 3 個子問題。

子問題①：給定  $(x + 2)(3x + 5) - (x + 2)(2x + 3)$ 。

教師幫助學生看到公因式  $(x + 2)$ ，先提出  $(x + 2)$ ，再合併多項式，

整理得  $(x + 2)(x + 2)$ ，因式分解為  $(x + 2)^2$ 。

子問題②：給定  $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3)$ 。

教師幫助學生將原式改寫為

$(2x + 1) \cdot (2x + 1) + (2x + 1)(x - 3)$ ，先提出公因式  $(2x + 1)$ ，再合併多項式，

所以因式分解為  $(2x + 1)(3x - 2)$ 。

子問題③：給定  $(-5x + 3)(2x - 1) - (1 - 2x)(x + 5)$ 。

教師引導學生發現  $(1 - 2x)$  就是  $-(2x - 1)$ ，

將原式改寫為  $(-5x + 3)(2x - 1) + (2x - 1)(x + 5)$ ，

先提出公因式  $(2x - 1)$ ，再合併多項式，

所以因式分解為  $(2x - 1)(-4x + 8)$ 。





基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解



### 小試身手

(1) ① 已知  $x \cdot 4x + 9 \cdot x$ 。說說看， $x$  是  $x \cdot 4x + 9 \cdot x$  的因式嗎？

$(4x + 9)$  也是  $x \cdot 4x + 9 \cdot x$  的因式嗎？

② 已知  $(2x - 9)(x - 3) + (x - 3)(x + 5)$ 。

說說看  $(x - 3)$  是  $(2x - 9)(x - 3) + (x - 3)(x + 5)$  的因式嗎？

$(3x - 12)$  也是  $(2x - 9)(x - 3) + (x - 3)(x + 5)$  的因式嗎？

答：① 是，是。

② 是，是。

(2) 利用提公因式法因式分解下列各式：

①  $(x + 2)(-6x + 5) + (-2x - 7)(x + 2)$ 。

②  $-7x^2 - 3x$ 。

答：①  $(x + 2)(-8x - 2)$ 。

②  $x(-7x - 3)$ 。

(3) 因式分解下列各式：

①  $(x - 1)(5x + 4) - (x - 1)(3x + 2)$ 。

②  $(1 + 3x)^2 + (1 + 3x)(5 - 2x)$ 。

③  $(5x - 2)(x - 3) - (3 - x)(4x - 1)$

答：①  $(x - 1)(2x + 2)$ 。

②  $(1 + 3x)(6 + x)$ 。

③  $(x - 3)(9x - 3)$ 。



### 教材內容說明：

1. 本頁小試身手針對提公因式作整係數二次多項式的因式分解進行練習。
2. 第(1)題包含 2 個子問題。學生能利用分配律將原式改寫為  $a = b \times c$  的形式，就能說明  $b$ 、 $c$  都是  $a$  的因式。
3. 第(2)題要求學生利用提公因式法作因式分解，包含 2 個子問題。  
學生能發現公因式並提出，再合併多項式，將多項式化簡為兩個一次因式的乘積。
4. 第(3)題包含 3 個子問題。

子問題①：因式分解  $(x - 1)(5x + 4) - (x - 1)(3x + 2)$ 。

學生能發現公因式並提出，再合併多項式，得到因式分解的結果。

子問題②：因式分解  $(1 + 3x)^2 + (1 + 3x)(5 - 2x)$ 。

學生能將原式改寫成  $(1 + 3x) \cdot (1 + 3x) + (1 + 3x)(5 - 2x)$ ，發現公因式並提出，再合併多項式，得到因式分解的結果。

子問題③：因式分解  $(5x - 2)(x - 3) - (3 - x)(4x - 1)$ 。

學生能發現  $(3 - x)$  就是  $-(x - 3)$ ，或者  $(x - 3)$  就是  $-(3 - x)$ 。

將式子改寫成  $(5x - 2)(x - 3) + (x - 3)(4x - 1)$  或

$-(5x - 2)(3 - x) - (3 - x)(4x - 1)$ ，發現公因式並提出，

再合併多項式，得到因式分解的結果。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

### ◎乘法公式作整係數二次多項式的因式分解

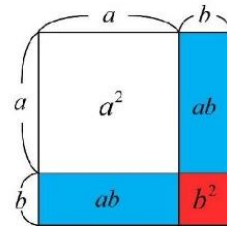
#### 複習乘法公式

(1)如右圖，已知 $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ ，

利用乘法公式展開下列各式：

①  $(2x+3)^2$

②  $(3x-1)^2$



解：①設 $a=2x$ ， $b=3$

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

②我知道 $(3x-1)^2 = [3x + (-1)]^2$ ，

設 $a=3x$ ， $b=-1$

$$\begin{aligned}(3x-1)^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (-1) + (-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1\end{aligned}$$

(2)已知 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

利用乘法公式展開 $(2x+1)(2x-1)$ 。

解：  $(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 8～11 頁的教學重點是幫助學生理解乘法公式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 本頁教材內容在複習乘法公式。

第(1)題給定  $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ ，要求學生利用乘法公式展開 2 個子問題的算式。

子問題①：給定  $(2x + 3)^2$ 。

教師引導學生假設  $2x = a$ ， $3 = b$ ，將  $(2x + 3)^2$  看成  $(a + b)^2$ ，

接著將公式中的  $a$  代入  $2x$ 、 $b$  代入  $3$ ，

得到  $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2$ ，

化簡得  $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ 。

子問題②：給定  $(3x - 1)^2$ 。

教師幫助學生將原式改寫為  $[3x + (-1)]^2$ 。

假設  $3x = a$ ， $-1 = b$ ，將  $[3x + (-1)]^2$  看成  $(a + b)^2$ ，

接著將公式中的  $a$  代入  $3x$ 、 $b$  代入  $-1$ ，

得到  $(3x - 1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot (-1) + (-1)^2$ ，

化簡後得  $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ 。

● 教師幫助學生透過圖示記憶乘法公式。

● 學生若在子問題②的代入有困難，教師可透過

$$(3x - 1)^2 = [3x + (-1)]^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot (-1) + (-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$

的算式讓學生看到完整代入公式的過程。

3. 第(2)題給定  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ，要求學生利用乘法公式展開  $(2x + 1)(2x - 1)$ 。

教師幫助學生將  $2x$  看成  $a$ ， $1$  看成  $b$  得到  $(2x + 1)(2x - 1) = (2x)^2 - 1^2$ ，

化簡得  $(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 - 1$ 。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(3)利用  $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$  因式分解下列各題：

$$\textcircled{1} x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \circ$$

$$\textcircled{2} x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2 \circ$$

$$\textcircled{3} (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3) + (-3)^2$$

$$\textcircled{4} (x+3)^2 + 2 \cdot (x+3) \cdot 5 + 5^2$$

解：①設  $a=x$ 、 $b=3$

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (a+b)^2 = (x+3)^2 \end{aligned}$$

②設  $a=x$ 、 $b=-5$

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (a+b)^2 = [x + (-5)]^2 = (x-5)^2 \end{aligned}$$

③設  $a=5x$ 、 $b=-3$

$$\begin{aligned} (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3) + (-3)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (a+b)^2 = [5x + (-3)]^2 = (5x-3)^2 \end{aligned}$$

④設  $a=(x+3)$ 、 $b=5$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + 2 \cdot (x+3) \cdot 5 + 5^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= (a+b)^2 = [(x+3) + 5]^2 = (x+8)^2 \end{aligned}$$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 8～11 頁的教學重點是幫助學生理解乘法公式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 第(3)題要求學生利用乘法公式因式分解下列 4 個子問題。

子問題①：給定  $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$ 。

教師引導學生假設  $a=x$ ， $b=3$ ，

將  $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$  看成  $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ ，

然後將  $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$  寫成  $(a + b)^2$ ，

所以因式分解為  $(x + 3)^2$ 。

子問題②：給定  $x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2$ 。

教師引導學生假設  $a=x$ ， $b=-5$ ，

將  $x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2$  看成  $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ ，

然後將  $x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2$  寫成  $(a + b)^2$ ，

所以因式分解為  $[x + (-5)]^2 = (x - 5)^2$ 。

子問題③：給定  $(5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3) + (-3)^2$

教師引導學生假設  $a=5x$ ， $b=-3$ ，

將  $(5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3) + (-3)^2$  看成  $a^2 + 2ab + b^2$ ，

然後將  $(5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-3) + (-3)^2$  寫成  $(a + b)^2$ ，

所以因式分解為  $[5x + (-3)]^2 = (5x - 3)^2$ 。

子問題④：給定  $(x + 3)^2 + 2 \cdot (x + 3) \cdot 5 + 5^2$

教師引導學生假設  $a=(x + 3)$ ， $b=5$ ，

將  $(x + 3)^2 + 2 \cdot (x + 3) \cdot 5 + 5^2$  看成  $a^2 + 2ab + b^2$ ，

然後將  $(x + 3)^2 + 2 \cdot (x + 3) \cdot 5 + 5^2$  寫成  $(a + b)^2$ ，

所以因式分解為  $[(x + 3) + 5]^2 = (x + 8)^2$ 。

- 本題教學重點在幫助學生看到不同樣態的多項式與乘法公式的關係，並能利用乘法公式完成因式分解。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(4) 利用  $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$  因式分解下列各題：

- ①  $x^2 + 10x + 25$
- ②  $4x^2 - 12x + 9$
- ③  $16x^2 - 56x + 49$

解：①設  $a=x$ ，得到  $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 25$

設  $b=5$ ，得到  $a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$

所以  $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

②因為  $4x^2 = (2x)^2$

設  $a=2x$ ，得到  $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + 9 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + 9$

設  $b=-3$ ，得到  $a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + 9 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + (-3)^2$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$$

所以  $4x^2 - 12x + 9 = [2x + (-3)]^2 = (2x-3)^2$

③因為  $16x^2 = (4x)^2$

設  $a=4x$ ，得到  $(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot (-7) + 49 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + 49$

設  $b=-7$ ，得到  $a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + 49 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + (-7)^2$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$$





### 教材內容說明：

1. 本教材第 8～11 頁的教學重點是幫助學生理解乘法公式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 第(2)題要求學生利用乘法公式因式分解下列 3 個子問題，教師幫助學生透過下列步驟完成因式分解。

子問題①：給定  $x^2 + 10x + 25$

步驟一：假設  $a=x$ ，利用乘法公式將原式改寫為  $a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 25$ 。

步驟二：假設  $b=5$ ，將步驟一的式子改寫為  $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$

步驟三：所以原式可以利用乘法公式寫成  $(x + 5)^2$ 。

子問題②：給定  $4x^2 - 12x + 9$

步驟一：將  $4x^2$  改記為  $(2x)^2$ ，假設  $a=2x$ ，利用乘法公式將原式改寫為

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + 9 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + 9$$

步驟二：假設  $b=-3$ ，將步驟一的式子改寫為

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + (-3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2。$$

步驟三：將原式利用乘法公式寫成  $[2x + (-3)]^2 = (2x - 3)^2$ 。

子問題③：給定  $4x^2 - 12x + 9$

步驟一：將  $16x^2$  改記為  $(4x)^2$ ，假設  $a=4x$ ，利用乘法公式將原式改寫為

$$(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot (-7) + 49 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + 49$$

步驟二：假設  $b=-7$ ，將步驟一的式子改寫為

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot (-7) + (-7)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2。$$

步驟三：將原式利用乘法公式寫成  $[4x + (-7)]^2 = (4x - 7)^2$ 。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(5) 利用  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  因式分解下列各題：

①  $x^2 - 1$

②  $4x^2 - 9$

③  $16 - 25x^2$

④  $(2x+3)^2 - (x+1)^2$

解：①設  $a=x$ ，得到  $x^2 - 1 = a^2 - 1$

設  $b=1$ ，得到  $a^2 - 1 = a^2 - (1)^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

所以  $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

②因為  $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + 9 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + 9$

設  $a=2x$ ，得到  $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 9 = a^2 - 9$

設  $b=3$ ，得到  $a^2 - 9 = a^2 - (3)^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

所以  $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$

③因為  $16 = (4)^2$ 、 $25x^2 = (5x)^2$

設  $a=4$ ， $b=5x$

得到  $16 - 25x^2 = (4)^2 - (5x)^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

所以  $16 - 25x^2 = (4+5x)(4-5x)$

④設  $a = (2x+3)$ 、 $b = (x+1)$

得到  $(2x+3)^2 - (x+1)^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (2x+3)^2 - (x+1)^2 &= [(2x+3) + (x+1)][(2x+3) - (x+1)] \\ &= (3x+4)(x+2) \end{aligned}$$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 8～11 頁的教學重點是幫助學生理解乘法公式作整係數二次多項式的因式分解。
2. 第(5)題要求學生利用乘法公式因式分解下列 4 個子問題，教師幫助學生透過下列步驟完成因式分解。

子問題①：給定  $x^2 - 1$

步驟一：假設  $a=x$ ，利用乘法公式將原式改寫為  $a^2 - 1$ 。

步驟二：假設  $b=1$ ，將步驟一的式子改寫為

$$a^2 - 1 = a^2 - (1)^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

步驟三：將原式利用乘法公式寫成  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ 。

子問題②：給定  $4x^2 - 9$

步驟一：將  $4x^2 - 9$  看成  $(2x)^2 - (3)^2$ ，假設  $a=2x$ ，利用乘法公式將原式改寫為  $a^2 - (3)^2$ 。

步驟二：假設  $b=3$ ，將步驟一的式子改寫為

$$a^2 - 1 = a^2 - (1)^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

步驟三：將原式利用乘法公式寫成  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ 。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解



小試身手

(1) 利用  $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$  因式分解下列各題：

①  $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$ 。

②  $x^2 + 2 \cdot x \cdot (-7) + (-7)^2$ 。

③  $(-2x)^2 + 2 \cdot (-2x) \cdot 9 + 9^2$

④  $(x - 7)^2 + 2 \cdot (x - 7) \cdot 11 + 11^2$

答：①  $(x + 5)^2$  ②  $(x - 7)^2$  ③  $(-2x + 9)^2$  ④  $(x + 4)^2$

(2) 利用  $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$  因式分解下列各題：

①  $x^2 - 14x + 49$

②  $16x^2 + 24x + 9$

答：①  $(x - 7)^2$  ②  $(4x + 3)^2$

(3) 利用  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  因式分解下列各題：

①  $1 - x^2$

②  $16x^2 - 25$

③  $49 - 9x^2$

答：①  $(1 + x)(1 - x)$  ②  $(4x + 5)(4x - 5)$  ③  $(7 + 3x)(7 - 3x)$



**教材內容說明：**

1. 本頁小試身手針對乘法公式作整係數二次多項式的因式分解進行練習。
2. 第(1)題包含 4 個子問題。給定以  $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$  列式的題目，學生能找到題目中代表  $a$ 、 $b$  的值，並利用乘法公式將原式因式分解為  $(a + b)^2$  的形式。
3. 第(2)題包含 2 個子問題。學生能找到題目中代表  $a$ 、 $b$  的值，並利用乘法公式將原式因式分解為  $(a + b)^2$  的形式。
4. 第(3)題包含 3 個子問題。學生能找到題目中代表  $a$ 、 $b$  的值，並利用乘法公式將原式因式分解為  $(a + b)(a - b)$  的形式。

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

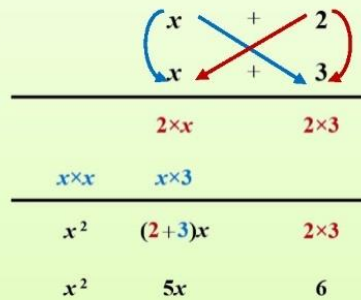
### ◎十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(1)右圖是直式計算 $(x+2)(x+3)$ 的過程，

得到 $(x+2)(x+3) = x \cdot x + x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \times 3$

$$= x^2 + (3+2)x + 2 \times 3$$

$$= x^2 + 5x + 6$$



①說說看， $x^2 + 5x + 6$ 的二次項係數

和兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的一次項係數有什麼關係？

②說說看， $x^2 + 5x + 6$ 的常數項

和兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項有什麼關係？

③說說看， $x^2 + 5x + 6$ 的一次項係數

和兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項有什麼關係？

解：

①我發現， $x^2 + 5x + 6$ 的二次項係數，

就是兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的一次項係數乘積，  
也就是 $1 = 1 \times 1$ 。

②我發現， $x^2 + 5x + 6$ 的常數項，

就是兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項乘積，  
也就是 $6 = 2 \times 3$ 。

③我發現， $x^2 + 5x + 6$ 的一次項係數，

就是兩個一次因式 $(x+2)$ 、 $(x+3)$ 的常數項相加，  
也就是 $5 = 2 + 3$ 。



### 教材內容說明：

1. 本教材第 13～18 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數為 1)的因式分解。
2. 本頁教材內容讓學生從分配律與直式乘法展開一次因式的乘積過程，看到二次項、一次項及常數項係數與兩個一次因式的關係。

第(1)題給定直式計算 $(x + 2)(x + 3)$ 的過程，並以橫式寫出 $(x + 2)(x + 3)$ 的過程與結果。

子問題①：要求學生說說看 $x^2 + 5x + 6$ 的二次項係數和兩個一次因式 $(x + 2)$ 、 $(x + 3)$ 的一次項係數有什麼關係。

教師引導學生從直式乘法和橫式算式中發現， $x^2 + 5x + 6$ 的二次項係數就是兩個一次因式 $(x + 2)$ 、 $(x + 3)$ 的一次項係數相乘的結果。

子問題②：要求學生說說看 $x^2 + 5x + 6$ 的常數項和兩個一次因式 $(x + 2)$ 、 $(x + 3)$ 的常數項有什麼關係。

教師引導學生從直式乘法和橫式算式中發現， $x^2 + 5x + 6$ 的常數項就是兩個一次因式 $(x + 2)$ 、 $(x + 3)$ 的常數項乘積。

子問題③：要求學生說說看 $x^2 + 5x + 6$ 的一次項係數和兩個一次因式 $(x + 2)$ 、 $(x + 3)$ 的一次項係數是什麼關係。

教師引導學生從直式乘法和橫式算式中發現， $x^2 + 5x + 6$ 的一次項係數就是兩個一次因式 $(x + 2)$ 、 $(x + 3)$ 的常數項相加。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

已知  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ，則：

- ① 兩個一次因式的常數項乘積  $a \times b$  就是積的常數項  $ab$ 。
- ② 兩個一次因式的常數項相加  $a + b$  就是積的一次項係數  $(a+b)$ 。



(2) 連連看，從左邊的多項式找出它的因式分解。

$x^2 + 7x + 10$	•	$(x+1)(x+10)$
$x^2 + 11x + 10$	•	$(x+2)(x+9)$
$x^2 + 7x + 6$	•	$(x+2)(x+5)$
$x^2 + 11x + 18$	•	$(x+1)(x+6)$

解：我發現  $x^2 + 7x + 10$  和  $x^2 + 11x + 10$  的常數項都是 10，

先把 10 分成兩個數相乘，也就是  $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$ ，

然後把分解的兩個數相加得到  $1 + 10 = 11$  和  $2 + 5 = 7$ ，

因為  $x^2 + 7x + 10 = x^2 + (2+5)x + 2 \times 5$ ，

所以  $x^2 + 7x + 10$  的因式分解為  $(x+2)(x+5)$ 。

因為  $x^2 + 11x + 10 = x^2 + (1+10)x + 1 \times 10$ ，

所以  $x^2 + 11x + 10$  的因式分解為  $(x+1)(x+10)$ 。

接著我把 6 分成兩個數相乘，得到  $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$ ，

將分解的兩個數相加得到  $1 + 6 = 7$  和  $2 + 3 = 5$ ，

因為  $x^2 + 7x + 6 = x^2 + (1+6)x + 1 \times 6$ ，

所以  $x^2 + 7x + 6$  的因式分解為  $(x+1)(x+6)$ 。

最後把 18 分成兩個數相乘，得到  $18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$ ，

因為  $x^2 + 11x + 18 = x^2 + (2+9)x + 2 \times 9$ ，

所以  $x^2 + 11x + 18$  的因式分解為  $(x+2)(x+9)$ 。



### 教材內容說明：

1. 本教材第 13～18 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數為 1)的因式分解。
2. 本頁上方教師提醒框在說明從  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  的式子中觀察得知兩個要點：
  - ①兩個一次因式的常數項乘積就是積的常數項。
  - ②兩個一次因式的常數項相加就是積的一次項係數。
3. 第(2)題給定左邊 4 個二次多項式，右邊 4 個因式分解，要求學生連連看，從左邊的多項式找到正確的因式分解。

教師協助學生利用兩步驟解題：

步驟一：分解常數項乘積，找到兩個一次因式的常數項。

先觀察左邊的多項式，發現  $x^2 + 7x + 10$  和  $x^2 + 11x + 10$  的常數項都是 10，將 10 分解為  $1 \times 10$  和  $2 \times 5$ 。

步驟二：將兩個一次因式的常數項相加，找到多項式的一次項係數。

接著將分解的兩個數相加，得到  $1 + 10 = 11$ 、 $2 + 5 = 7$ 。

所以

$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + (2 + 5)x + 2 \times 5 = (x + 2)(x + 5)、$$

$$x^2 + 11x + 10 = x^2 + (1 + 10)x + 1 \times 10 = (x + 1)(x + 10)。$$

繼續依步驟一、二檢驗  $x^2 + 7x + 6$ ，將 6 分解為  $1 \times 6$  和  $2 \times 3$ 。

接著將分解的兩個數相加，得到  $1 + 6 = 7$ 、 $2 + 3 = 5$

$$\text{所以 } x^2 + 7x + 6 = x^2 + (1 + 6)x + 1 \times 6 = (x + 1)(x + 6)$$

最後檢驗  $x^2 + 11x + 18$ ，將 18 分解為  $1 \times 18$ 、 $2 \times 9$  和  $3 \times 6$ 。

接著將分解的兩個數相加，得到  $1 + 18 = 19$ 、 $2 + 9 = 11$  和  $3 + 6 = 9$

$$\text{所以 } x^2 + 11x + 18 = x^2 + (2 + 9)x + 2 \times 9 = (x + 2)(x + 9)$$



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(3) ①  $x^2 + ( )x + 8$  的因式分解為  $(x + 2)(x + 4)$ ，請問  $( )$  內要填多少？

②  $x^2 + ( )x + 8$  的因式分解為  $(x + 1)(x + 8)$ ，請問  $( )$  內要填多少？

解：①我知道，兩個一次因式的常數項相加就是積的一次項係數，

兩個一次因式的常數項為 2 和 4，所以  $( ) = 2 + 4 = 6$ 。

②兩個一次因式的常數項為 1 和 8，所以  $( ) = 1 + 8 = 9$ 。

(4) 利用十字交乘法因式分解  $x^2 + 5x + 4$ 。

解：我把 4 分成兩個數相乘，得到  $4 = 2 \times 2 = 1 \times 4$ ，分兩次檢驗。

我先利用  $4 = 2 \times 2$ ，檢查

$$x^2 + ( )x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$

檢查過程在下圖。

所以  $( )$  要填入  $2 + 2 = 4$ ，

發現和題目  $x^2 + 5x + 4$  不一樣，

所以結果不正確。

$x$	$+$	$2$
$x$	$+$	$2$
-----		
$2 \times x$	$2 \times 2$	
$x \times x$	$x \times 2$	
-----		
$x^2$	$(2+2)x$	$2 \times 2$

接著再用  $4 = 1 \times 4$ ，檢查

$$x^2 + ( )x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

檢查過程在下圖。

所以  $( )$  要填入  $1 + 4 = 5$ ，

發現和題目  $x^2 + 5x + 4$  一樣，

所以結果正確。

$x$	$+$	$1$
$x$	$+$	$4$
-----		
$1 \times x$	$1 \times 4$	
$x \times x$	$x \times 4$	
-----		
$x^2$	$(1+4)x$	$1 \times 4$

所以  $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 13～18 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數為 1)的因式分解。

2. 第(3)題包含 2 個子問題，皆要求學生從因式分解的結果找到多項式的一次項係數。

教師協助學生，利用「兩個一次因式的常數項相加就是積的一次項係數」找到( )的值。

子問題①： $(x + 2)(x + 4)$ 的常數項為 2 和 4，所以( ) $= 2 + 4 = 6$ 。

子問題②： $(x + 1)(x + 8)$ 的常數項為 1 和 8，所以( ) $= 1 + 8 = 9$ 。

3. 第(4)題要求學生因式分解  $x^2 + 5x + 4$ 。

教師幫助學生透過下列步驟完成因式分解。

步驟一：分解常數項乘積，找到兩個一次因式的常數項。將常數項 4 分解為  $2 \times 2$  和  $1 \times 4$ 。

步驟二：將兩個一次因式的常數項相加，找到多項式的一次項係數。

因為  $4 = 2 \times 2 = 1 \times 4$ ，有 2 種分解結果，利用直式計算過程，分兩次檢驗：

第 1 次檢驗，利用  $4 = 2 \times 2$ ，計算得到( ) $= 2 + 2 = 4$ ，所以多項式為  $x^2 + 4x + 4$ ，

與題目不相同。

第 2 次檢驗，利用  $4 = 1 \times 4$ ，計算得到( ) $= 1 + 4 = 5$ ，所以多項式為  $x^2 + 5x + 4$ ，

與題目相同。

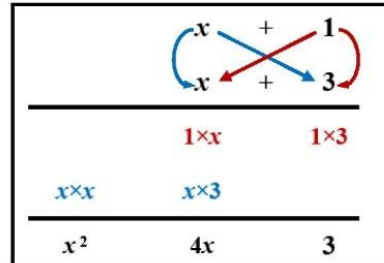
所以  $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$ 。

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

### 重點整理

利用將常數項分解為兩個整數  $p$ 、 $q$  相乘，再利用  $(p+q)$  的結果檢驗一次項的正確性，像這樣將多項式因式分解的方法，就稱為十字交乘法。

如右圖， $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$



(5) 利用十字交乘法因式分解下列各題：

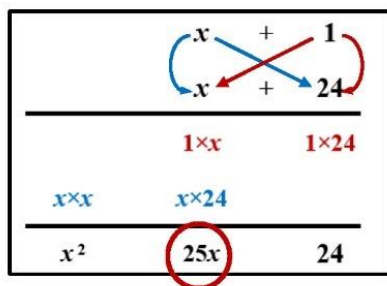
- ①  $x^2 + 14x + 24$
- ②  $x^2 + 2x - 3$
- ③  $x^2 - 2x - 3$
- ④  $x^2 - 6x + 5$

解：

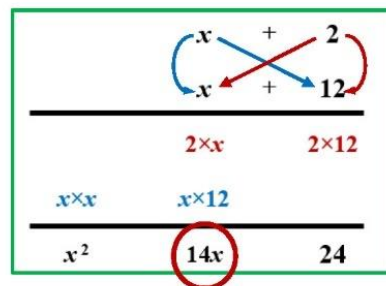
① 我把 24 分成兩個數相乘，得到  $24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ ，和  $24 = -1 \times -24 = -2 \times -12 = -3 \times -8 = -4 \times -6$ 。

因為一次項係數是正數，所以只要檢查正數乘以正數的部分就好。  
分四次檢查如下：

第一次： $24 = 1 \times 24$



第二次： $24 = 2 \times 12$



第二次檢查正確，所以  $x^2 + 14x + 24 = (x + 2)(x + 12)$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 13～18 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數為 1)的因式分解。
2. 本頁上方重點整理框在說明「利用將常數項分解為兩個整數相乘，再利用兩個整數相加的結果檢驗一次項的正確性」將多項式因式分解的方法就是十字交乘法。
3. 第(5)題要求學生利用十字交乘法因式分解下列 4 個子問題。

教師幫助學生透過下列步驟完成因式分解。

子問題①：給定  $x^2 + 14x + 24$

步驟一：分解常數項乘積，找到兩個一次因式的常數項。

將常數項 24 分解為  $1 \times 24$ 、 $2 \times 12$ 、 $3 \times 8$  和  $4 \times 6$ ，同時也分解成  $(-1) \times (-24)$ 、 $(-2) \times (-12)$ 、 $(-3) \times (-8)$  和  $(-4) \times (-6)$  等結果。

步驟二：將兩個一次因式的常數項相加，找到多項式的一次項係數。

教師引導學生發現「一次項的係數為正數，所以分解的兩個數字一定為正數＋正數」的現象。所以只要檢查正數乘以正數的部份就好。

因為  $24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$ ，有 4 種分解結果，利用直式計算過程，

分四次檢驗：

第 1 次檢驗，利用  $24 = 1 \times 24$ ，計算得  $1 + 24 = 25$ ，

所以多項式為  $x^2 + 25x + 24$ ，與題目不相同。

第 2 次檢驗，利用  $24 = 2 \times 12$ ，計算得  $2 + 12 = 14$ ，

所以多項式為  $x^2 + 14x + 24$ ，與題目相同。

所以  $x^2 + 14x + 24 = (x + 2)(x + 12)$ 。

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

② 因為  $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + (-3)$ ，我把  $(-3)$  分成兩個數相乘，

得到  $-3 = 1 \times (-3) = (-1) \times 3$ ，分兩次檢查。

第一次： $-3 = 1 \times (-3)$

第二次： $-3 = (-1) \times 3$

第二次檢查正確，所以  $x^2 + 2x - 3 = [x + (-1)](x + 3) = (x - 1)(x + 3)$

③ 因為  $x^2 - 2x - 3 = x^2 + (-2)x + (-3)$ ，我把  $(-3)$  分成兩個數相乘，

得到  $-3 = 1 \times (-3) = (-1) \times 3$ ，分兩次檢驗。

第一次： $-3 = 1 \times (-3)$

第一次檢查就正確，所以  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)[x + (-3)] = (x + 1)(x - 3)$





### 教材內容說明：

1. 本教材第 13～18 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數為 1)的因式分解。

2. 子問題②：給定  $x^2 + 2x - 3$

步驟一：分解常數項乘積，找到兩個一次因式的常數項。

教師幫助學生將  $x^2 + 2x - 3$  看成  $x^2 + 2x + (-3)$  後，再將常數項  $-3$  分解為  $1 \times (-3)$  和  $(-1) \times 3$ 。

步驟二：將兩個一次因式的常數項相加，找到多項式的一次項係數。

因為  $-3 = 1 \times (-3) = (-1) \times 3$ ，有 2 種分解結果，利用直式計算過程，

分兩次檢驗：

第 1 次檢驗，利用  $-3 = 1 \times (-3)$ ，計算得  $1 + (-3) = -2$ ，

所以多項式為  $x^2 - 2x - 3$ ，與題目不相同。

第 2 次檢驗，利用  $-3 = (-1) \times 3$ ，計算得  $(-1) + 3 = 2$ ，

所以多項式為  $x^2 + 2x - 3$ ，與題目相同。

所以  $x^2 + 2x - 3 = [x + (-1)](x + 3) = (x - 1)(x + 3)$ 。

子問題③：給定  $x^2 - 2x - 3$

步驟一：分解常數項乘積，找到兩個一次因式的常數項。

教師幫助學生將  $x^2 - 2x - 3$  看成  $x^2 - 2x + (-3)$  後，

再將常數項  $-3$  分解為  $1 \times (-3)$  和  $(-1) \times 3$ 。

步驟二：將兩個一次因式的常數項相加，找到多項式的一次項係數。

因為  $-3 = 1 \times (-3) = (-1) \times 3$ ，有 2 種分解結果，利用直式計算過程，

分兩次檢驗：

第 1 次檢驗，利用  $-3 = 1 \times (-3)$ ，計算得  $1 + (-3) = -2$ ，

所以多項式為  $x^2 - 2x - 3$ ，與題目相同。

所以  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)[x + (-3)] = (x + 1)(x - 3)$ 。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

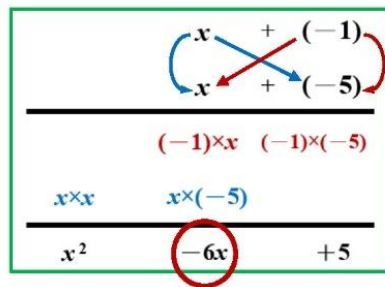
基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

④  $x^2 - 6x + 5 = x^2 + (-6)x + 5$ ，我把 5 分成兩個數相乘，

得到  $5 = 1 \times 5$  和  $5 = -1 \times -5$ 。

因為一次項係數是負數，所以一定是負數乘以負數，

只需要檢查  $5 = (-1) \times (-5)$  就好。

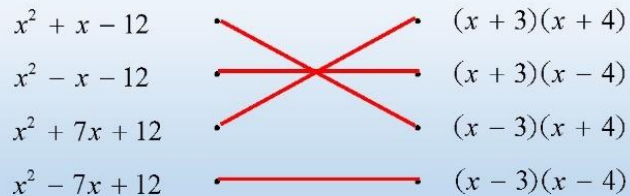


檢查正確，所以  $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$



隨堂練習

連連看，找出多項式的因式分解。





### 教材內容說明：

1. 本教材第 13～18 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數為 1)的因式分解。

2. 子問題④：給定  $x^2 - 6x + 5$

步驟一：分解常數項乘積，找到兩個一次因式的常數項。

教師幫助學生將  $x^2 - 6x + 5$  看成  $x^2 + (-6)x + 5$  後，

再將常數項 5 分解為  $1 \times 5$  和  $(-1) \times (-5)$ 。

步驟二：將兩個一次因式的常數項相加，找到多項式的一次項係數。

教師引導學生發現「一次項的係數為負數，所以分解的兩個數字一定為負數＋負數」的現象。所以只要檢查負數乘以負數的部份就好。

直接檢驗  $5 = (-1) \times (-5)$ ，計算得  $(-1) + (-5) = -6$ ，

所以多項式為  $x^2 + (-6)x + 5$ ，與題目相同。

所以  $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$ 。

3. 本頁下方隨堂練習要求學生連連看，找出多項式的因式分解。

教師幫助學生能利用十字交乘法的兩步驟找出多項式的因式分解。

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

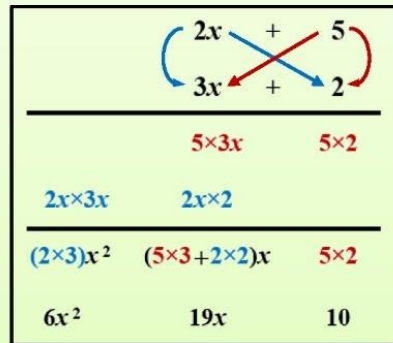
## ◎二次項係數不為 1 的十字交乘法

(6)右圖是利用直式計算 $(2x + 5)(3x + 2)$ 的過程，得到 $(2x + 5)(3x + 2)$ 

$$= 2x \times 3x + 2x \times 2 + 5 \times 3x + 5 \times 2$$

$$= (2 \times 3)x^2 + (2 \times 2 + 5 \times 3)x + (5 \times 2)$$

$$= 6x^2 + 19x + 10。$$

①說說看， $6x^2 + 19x + 10$ 的二次項係數和兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的一次項係數有什麼關係？②說說看， $6x^2 + 19x + 10$ 的常數項和兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的常數項有什麼關係？③說說看， $6x^2 + 19x + 10$ 的一次項係數和兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的一次項與常數項有甚麼關係？

解：

①我發現， $6x^2 + 19x + 10$ 的二次項係數，就是兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的一次項係數乘積，也就是 $6 = 2 \times 3$ 。②我發現， $6x^2 + 19x + 10$ 的常數項，就是兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的常數項乘積，也就是 $10 = 5 \times 2$ 。③我發現， $6x^2 + 19x + 10$ 的一次項係數，就是兩個一次因式 $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$ 的一次項與常數項相乘再相加的結果，也就是 $19x = (2 \times 2)x + (5 \times 3)x$ 。



### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。
2. 本頁教材內容在進行二次項係數不為 1 的十字交乘法教學。學生從分配律與直式乘法展開一次因式的乘積過程，看到二次項、一次項及常數項係數與兩個一次因式的關係。  
第(6)題給定直式計算 $(2x + 5)(3x + 2)$ 的過程，並以橫式寫出 $(2x + 5)(3x + 2)$ 的過程與結果，包含 3 個子問題。

子問題①：要求學生說說看  $6x^2 + 19x + 10$  的二次項係數和兩個一次因式  $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$  的一次項係數有什麼關係。

教師引導學生從直式乘法和橫式算式中發現，

$6x^2 + 19x + 10$  的二次項係數就是兩個一次因式  $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$  的一次項係數相乘的結果。

子問題②：要求學生說說看  $6x^2 + 19x + 10$  的常數項和兩個一次因式  $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$  的常數項有什麼關係。

教師引導學生從直式乘法和橫式算式中發現，

$6x^2 + 19x + 10$  的常數項就是兩個一次因式  $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$  的常數項乘積。

子問題③：要求學生說說看  $6x^2 + 19x + 10$  的一次項係數和兩個一次因式  $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$  的一次項係數有什麼關係。

教師引導學生從直式乘法和橫式算式中發現，

$6x^2 + 19x + 10$  的一次項係數就是兩個一次因式  $(2x + 5)$ 、 $(3x + 2)$  的常數項相乘再相加的結果。

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

已知  $(ax + b)(cx + d) = (a \cdot c)x^2 + (a \cdot d + b \cdot c)x + b \cdot d$ ，則：

- ① 兩個一次因式的一次項係數的乘積  $a \cdot c$  就是積的二次項係數  $ac$ 。
- ② 兩個一次因式的常數項乘積  $b \cdot d$  就是積的常數項  $bd$ 。
- ③ 再利用十字交乘法算出積的一次項係數。



(7) 連連看，從左邊的多項式找出它的因式分解。

$2x^2 - 5x + 3$	•	$(x + 1)(2x + 3)$
$2x^2 + x - 3$	•	$(x + 3)(2x + 1)$
$2x^2 + 5x + 3$	•	$(x + 1)(2x - 3)$
$2x^2 + 5x - 3$	•	$(x - 1)(2x + 3)$
$2x^2 - 7x + 3$	•	$(x + 3)(2x - 1)$
$2x^2 - 5x - 3$	•	$(x - 3)(2x + 1)$
$2x^2 + 7x + 3$	•	$(x - 1)(2x - 3)$
$2x^2 - x - 3$	•	$(x - 3)(2x - 1)$

解：

我發現二次項的係數都是 2，

所以先分解二次項係數，得到  $2 = 1 \times 2 = 2 \times 1$ ，

我只使用  $2 = 1 \times 2$  的分解方式，分解常數項時再配成不同組合。



### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 本頁上方教師提醒框在說明從

$(ax + b)(cx + d) = (a \cdot c)x^2 + (a \cdot d + b \cdot c)x + b \cdot d$  的式子中觀察得知三個要點：

①兩個一次因式的一次項係數乘積就是二次項的係數。

②兩個一次因式的常數項乘積就是積的常數項。

③利用十字交乘法算出積的一次項係數。

3. 第(7)題給定左邊二次多項式，右邊因式分解，要求學生連連看，從左邊的多項式找到正確的因式分解。

教師協助學生利用兩步驟解題：

步驟一：分解二次項係數，只使用其中一種分解方式。

步驟二：因為二次項係數都是 2，將 2 分解為  $1 \times 2$  和  $2 \times 1$ ，

只使用  $2 = 1 \times 2$  的分解方式繼續下列步驟。

- 本頁教學內容開始進行二次項係數不為 1 的十字交乘法。步驟一在分解二次項係數時，只使用其中一種分解方式繼續下列步驟，教師可舉例說明使用所有的分解方式進行十字交乘法時，結果會重複出現，所以在步驟一時只使用其中一種分解方式即可。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

① 常數項的係數有  $+3$  和  $-3$  兩種，我先考慮  $3 = 1 \times 3 = (-1) \times (-3)$ ，如下圖，固定二次項係數為  $1 \times 2$  後，共有四種擺放方式。

第一種： $1 \times 3$

$1x$	$+$	$1$
$2x$	$+$	$3$
<hr/>		
$1 \times 2x$		$1 \times 3$
$1x \times 2x$	$1x \times 3$	
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$(1 \times 2 + 1 \times 3)x$	$1 \times 3$
$2x^2$	$5x$	$3$

$$2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$$

第二種： $3 \times 1$

$1x$	$+$	$3$
$2x$	$+$	$1$
<hr/>		
$3 \times 2x$		$3 \times 1$
$1x \times 2x$	$1x \times 1$	
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$(3 \times 2 + 1 \times 1)x$	$3 \times 1$
$2x^2$	$7x$	$3$

$$2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$$

第三種： $(-1) \times (-3)$

$1x$	$+$	$(-1)$
$2x$	$+$	$(-3)$
<hr/>		
$(-1) \times 2x$		$(-1) \times (-3)$
$1x \times 2x$	$1x \times (-1)$	
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$[(-1) \times 2 + 1 \times (-3)]x$	$(-1) \times (-3)$
$2x^2$	$-5x$	$+3$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$$

第四種： $(-3) \times (-1)$

$1x$	$+$	$(-3)$
$2x$	$+$	$(-1)$
<hr/>		
$(-3) \times 2x$		$(-3) \times (-1)$
$1x \times 2x$	$1x \times (-1)$	
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$[(-3) \times 2 + 1 \times (-1)]x$	$(-3) \times (-1)$
$2x^2$	$-7x$	$+3$

$$2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)$$





### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 承上頁，接下來進行步驟二。

步驟二：分解常數項乘積，找到兩個一次因式的常數項。

先觀察左邊的多項式，發現多項式的常數項都有 +3 和 -3 兩種，

先考慮  $3 = 1 \times 3 = (-1) \times (-3)$  的分解方式。

根據步驟一，固定二次項係數為  $1 \times 2$  後，

配合常數項  $3 = 1 \times 3 = (-1) \times (-3)$  的分解方式，需要四次檢驗過程。

第一種方法：常數項  $1 \times 3$

得到一次項係數為  $1 \times 2 + 1 \times 3 = 5$ ，所以  $2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$

第二種方法：常數項  $3 \times 1$

得到一次項係數為  $3 \times 2 + 1 \times 1 = 7$ ，所以  $2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$

第三種方法：常數項  $(-1) \times (-3)$

得到一次項係數為  $(-1) \times 2 + 1 \times (-3) = -5$ ，所以  $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$

第四種方法：常數項  $(-3) \times (-1)$

得到一次項係數為  $(-3) \times 2 + 1 \times (-1) = -7$ ，所以  $2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)(2x - 1)$



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

② 然後考慮  $-3 = (-1) \times 3 = 1 \times (-3)$ ，

如下圖，固定二次項係數為  $1 \times 2$ ，共有四種擺放方式。

第一種： $(-1) \times 3$

$1x$	+	$(-1)$
$2x$	+	$3$
<hr/>		
$(-1) \times 2x$		$(-1) \times 3$
$1x \times 2x$		$1x \times 3$
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$[(-1) \times 2 + 1 \times 3]x$	$(-1) \times 3$
$2x^2$	$x$	$-3$

$$2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$$

第二種： $3 \times (-1)$

$1x$	+	$3$
$2x$	+	$(-1)$
<hr/>		
$3 \times 2x$		$3 \times (-1)$
$1x \times 2x$		$1x \times (-1)$
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$[3 \times 2 + 1 \times (-1)]x$	$3 \times (-1)$
$2x^2$	$5x$	$-3$

$$2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$$

第三種： $1 \times (-3)$

$1x$	+	$1$
$2x$	+	$(-3)$
<hr/>		
$1 \times 2x$		$1 \times (-3)$
$1x \times 2x$		$1x \times (-3)$
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$[1 \times 2 + 1 \times (-3)]x$	$1 \times (-3)$
$2x^2$	$-x$	$-3$

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

第四種： $(-3) \times 1$

$1x$	+	$(-3)$
$2x$	+	$1$
<hr/>		
$(-3) \times 2x$		$(-3) \times 1$
$1x \times 2x$		$1x \times 1$
<hr/>		
$(1 \times 2)x^2$	$[(-3) \times 2 + 1 \times 1]x$	$(-3) \times 1$
$2x^2$	$-5x$	$-3$

$$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 承上頁，繼續進行步驟二，接下來考慮  $-3 = (-1) \times 3 = 1 \times (-3)$  的分解方式。

根據步驟一，固定二次項係數為  $1 \times 2$  後，

配合常數項  $-3 = (-1) \times 3 = 1 \times (-3)$  的分解方式，需要四次檢驗過程。

第一種方法：常數項  $(-1) \times 3$

得到一次項係數為  $(-1) \times 2 + 1 \times 3 = 1$ ，所以  $2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$

第二種方法：常數項  $3 \times (-1)$

得到一次項係數為  $3 \times 2 + 1 \times (-1) = 5$ ，所以  $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$

第三種方法：常數項  $1 \times (-3)$

得到一次項係數為  $1 \times 2 + 1 \times (-3) = -1$ ，所以  $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$

第四種方法：常數項  $(-3) \times 1$

得到一次項係數為  $(-3) \times 2 + 1 \times 1 = -5$ ，所以  $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

- (8) ①  $3x^2 + ( )x + 10$  的因式分解為  $(x+2)(3x+5)$ ，請問  $( )$  內要填多少？  
 ②  $5x^2 + ( )x - 6$  的因式分解為  $(x-3)(5x+2)$ ，請問  $( )$  內要填多少？

解：

- ① 如右圖，我把  $x+2$  改記為  $1x+2$

再利用十字交乘法

算出一次項係數，

所以  $( ) = 5 + 6 = 11$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccc}
 1x & + & & 2 & \\
 & \swarrow & + & \searrow & \\
 3x & & + & & 5
 \end{array} \\
 \hline
 2 \times 3x \\
 \\
 x \times 5 \\
 \hline
 (2 \times 3 + 1 \times 5)x \\
 \\
 11x
 \end{array}$$

- ② 如右圖，我利用十字交乘法

算出一次項係數，

所以  $( ) = 2 + (-15) = -13$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccc}
 1x & + & & (-3) & \\
 & \swarrow & + & \searrow & \\
 5x & & + & & 2
 \end{array} \\
 \hline
 (-3) \times 5x \\
 \\
 1x \times 2 \\
 \hline
 [(-3) \times 5 + 1 \times 2]x \\
 \\
 -13x
 \end{array}$$



**教材內容說明：**

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 第(8)題包含 2 個子問題，皆要求學生從因式分解的結果找到多項式的一次項係數。

教師協助學生，利用「利用十字交乘法算出積的一次項係數」找到( )的值。

子問題①：將 $(x + 2)(3x + 5)$ 改記為 $(1x + 2)(3x + 5)$ ，

再利用十字交乘法計算得( ) $= 2 \times 3 + 1 \times 5 = 11$ 。

子問題②：將 $(x - 3)(5x + 2)$ 改記為 $[1x + (-3)](5x + 2)$ ，

再利用十字交乘法計算得( ) $= (-3) \times 5 + 1 \times 2 = -13$ 。

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(9)利用十字交乘法因式分解  $7x^2 + 16x - 15$ 。

解：

步驟一：分解二次項係數，只要分解成兩正數相乘就好，得到  $7 = 1 \times 7$

步驟二：分解常數項，得  $-15 = 1 \times (-15) = (-1) \times 15 = 3 \times (-5) = (-3) \times 5$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$  \begin{array}{r}  1x \quad + \quad 1 \\  7x \quad + \quad (-15) \\  \hline  1 \times 7x \\  1x \times (-15) \\  \hline  [1 \times 7 + 1 \times (-15)]x \\  -8x  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  1x \quad + \quad (-15) \\  7x \quad + \quad 1 \\  \hline  (-15) \times 7x \\  1x \times 1 \\  \hline  [(-15) \times 7 + 1 \times 1]x \\  -104x  \end{array}  $
$  \begin{array}{r}  1x \quad + \quad (-1) \\  7x \quad + \quad 15 \\  \hline  (-1) \times 7x \\  1x \times 15 \\  \hline  [(-1) \times 7 + 1 \times 15]x \\  +8x  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  1x \quad + \quad 15 \\  7x \quad + \quad (-1) \\  \hline  15 \times 7x \\  1x \times (-1) \\  \hline  [15 \times 7 + 1 \times (-1)]x \\  +104x  \end{array}  $
$  \begin{array}{r}  1x \quad + \quad 3 \\  7x \quad + \quad (-5) \\  \hline  3 \times 7x \\  1x \times (-5) \\  \hline  [3 \times 7 + 1 \times (-5)]x \\  +16x  \end{array}  $	

所以  $7x^2 + 16x - 15 = (x + 3)(7x - 5)$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 第(9)題要求學生利用十字交乘法因式分解  $7x^2 + 16x - 15$ 。

教師幫助學生透過下列步驟完成因式分解。

步驟一：分解二次項係數，只要分解成兩正數相乘且固定一種就好。

將二次項係數 7 分解為  $1 \times 7$ 。

步驟二：分解常數項係數，得到  $-15 = 1 \times (-15) = (-1) \times 15 = 3 \times (-5) = (-3) \times 5$ ，有 4 種分解結果。

步驟三：利用十字交乘法檢驗一次項係數。

第一次檢驗：常數項  $1 \times (-15)$

得到一次項係數為  $1 \times 7 + 1 \times (-15) = -8$ ，與題目不相同。

第二次檢驗：常數項  $(-15) \times 1$

得到一次項係數為  $(-15) \times 7 + 1 \times 1 = -104$ ，與題目不相同。

第三次檢驗：常數項  $(-1) \times 15$

得到一次項係數為  $(-1) \times 7 + 1 \times 15 = 8$ ，與題目不相同。

第四次檢驗：常數項  $15 \times (-1)$

得到一次項係數為  $15 \times 7 + 1 \times (-1) = 104$ ，與題目不相同。

第五次檢驗：常數項  $3 \times (-5)$

得到一次項係數為  $3 \times 7 + 1 \times (-5) = 16$ ，與題目相同。

所以  $7x^2 + 16x - 15 = (x + 3)(7x - 5)$ 。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

(10)利用十字交乘法因式分解下列各題：

①  $2x^2 + 7x + 6$

②  $2x^2 - 13x + 6$

③  $3x^2 + 17x - 6$

④  $3x^2 - 7x - 6$

解：

① 步驟一：分解二次項係數，得到  $2 = 1 \times 2$

步驟二：分解常數項，因為常數項和一次項係數都是正數，

所以只要分解成兩正數相乘，即  $6 = 1 \times 6 = 6 \times 1 = 2 \times 3 = 3 \times 2$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$1x$	+	$1$
$2x$	+	$6$
<hr/>		
$1 \times 2x$		
$1x \times 6$		
<hr/>		
$(1 \times 2 + 1 \times 6)x$		
<hr/>		
$8x$		

$1x$	+	$6$
$2x$	+	$1$
<hr/>		
$6 \times 2x$		
$1x \times 1$		
<hr/>		
$(6 \times 2 + 1 \times 1)x$		
<hr/>		
$13x$		

$1x$	+	$2$
$2x$	+	$3$
<hr/>		
$2 \times 2x$		
$1x \times 3$		
<hr/>		
$(2 \times 2 + 1 \times 3)x$		
<hr/>		
$7x$		

所以  $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$





### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 第(5)題要求學生利用十字交乘法因式分解下列 4 個子問題。

教師幫助學生透過三個步驟完成因式分解。

子問題①：給定  $2x^2 + 7x + 6$

步驟一：分解二次項係數，固定  $2 = 1 \times 2$  的分解方式。

步驟二：分解常數項，教師幫助學生看到常數項和一次項係數都是正數，

所以只要分解成兩正數相乘就好。

也就是常數項 6 分解為  $1 \times 6$ 、 $6 \times 1$ 、 $2 \times 3$  和  $3 \times 2$ 。

步驟三：利用十字交乘法檢驗一次項係數。

第一次檢驗：常數項  $1 \times 6$

得到一次項係數為  $1 \times 2 + 1 \times 6 = 8$ ，與題目不相同。

第二次檢驗：常數項  $6 \times 1$

得到一次項係數為  $6 \times 2 + 1 \times 1 = 13$ ，與題目不相同。

第三次檢驗：常數項  $2 \times 3$

得到一次項係數為  $2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$ ，與題目相同。

所以  $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$ 。

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

② 步驟一：分解二次項係數，得到  $2 = 1 \times 2$

步驟二：分解常數項，因為常數項是正數，且一次項係數是負數，  
所以只要分解成兩負數相乘，

$$\text{即 } 6 = (-1) \times (-6) = (-6) \times (-1) = (-2) \times (-3) = (-3) \times (-2)$$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cc} 1x & + & (-1) \\ 2x & + & (-6) \end{array} \\ \hline (-1) \times 2x \\ 1x \times (-6) \\ \hline [(-1) \times 2 + 1 \times (-6)]x \\ \hline -8x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cc} 1x & + & (-6) \\ 2x & + & (-1) \end{array} \\ \hline (-6) \times 2x \\ 1x \times (-1) \\ \hline [(-6) \times 2 + 1 \times (-1)]x \\ \hline -13x \end{array}$$

$$\text{所以 } 2x^2 - 13x + 6 = (x - 6)(2x - 1)$$

③ 步驟一：分解二次項係數，得到  $3 = 1 \times 3$

步驟二：分解常數項，因為常數項為負，一次項係數為正，

$$\text{所以分解的兩數為一正一負，得到 } -6 = 1 \times (-6) = (-1) \times 6 = 2 \times (-3) = (-2) \times 3$$

步驟三：如下圖，用十字交乘法檢驗一次項係數

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cc} 1x & + & 1 \\ 3x & + & (-6) \end{array} \\ \hline 1 \times 3x \\ 1x \times (-6) \\ \hline [1 \times 3 + 1 \times (-6)]x \\ \hline -3x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cc} 1x & + & (-6) \\ 3x & + & 1 \end{array} \\ \hline (-6) \times 3x \\ 1x \times 1 \\ \hline [(-6) \times 3 + 1 \times 1]x \\ \hline -17x \end{array}$$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 子問題②：給定  $2x^2 - 13x + 6$

步驟一：分解二次項係數，固定  $2 = 1 \times 2$  的分解方式。

步驟二：分解常數項，教師幫助學生看到常數項是正數，且一次項係數是負數，

所以只要分解成兩負數相乘就好。

也就是常數項 6 分解為  $(-1) \times (-6)$ 、 $(-6) \times (-1)$ 、 $(-2) \times (-3)$  和  $(-3) \times (-2)$ 。

步驟三：利用十字交乘法檢驗一次項係數。

第一次檢驗：常數項  $(-1) \times (-6)$

得到一次項係數為  $(-1) \times 2 + 1 \times (-6) = -8$ ，與題目不相同。

第二次檢驗：常數項  $(-6) \times (-1)$

得到一次項係數為  $(-6) \times 2 + (-1) \times 1 = -13$ ，與題目不相同。

所以  $2x^2 - 13x + 6 = (x - 6)(2x - 1)$ 。

3. 子問題③：給定  $3x^2 + 17x - 6$

步驟一：分解二次項係數，固定  $3 = 1 \times 3$  的分解方式。

步驟二：分解常數項，教師幫助學生看到常數項是負數，且一次項係數是正數，

所以分解的兩數為一正一負。

也就是常數項  $-6$  分解為  $1 \times (-6)$ 、 $(-1) \times 6$ 、 $2 \times (-3)$  和  $(-2) \times 3$ 。

步驟三：利用十字交乘法檢驗一次項係數。

第一次檢驗：常數項  $1 \times (-6)$

得到一次項係數為  $1 \times 3 + 1 \times (-6) = -3$ ，與題目不相同。

第二次檢驗：常數項  $(-6) \times 1$

得到一次項係數為  $(-6) \times 3 + 1 \times 1 = -17$ ，與題目不相同。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3

基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad (-1) \\
 3x \quad + \quad 6 \\
 \hline
 (-1) \times 3x \\
 1x \times 6 \\
 \hline
 [(-1) \times 3 + 1 \times 6]x \\
 \hline
 +3x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad 6 \\
 3x \quad + \quad (-1) \\
 \hline
 6 \times 3x \\
 1x \times (-1) \\
 \hline
 [6 \times 3 + 1 \times (-1)]x \\
 \hline
 +17x
 \end{array}$$

所以  $3x^2 + 17x - 6 = (x + 6)(3x - 1)$

④ 步驟一和步驟二和第③題相同，

步驟三：步驟二已經檢查過的不用再檢查，從  $-6 = 2 \times (-3) = (-2) \times 3$  開始檢查

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad 2 \\
 3x \quad + \quad (-3) \\
 \hline
 2 \times 3x \\
 1x \times (-3) \\
 \hline
 [2 \times 3 + 1 \times (-3)]x \\
 \hline
 +3x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1x \quad + \quad (-3) \\
 3x \quad + \quad 2 \\
 \hline
 (-3) \times 3x \\
 1x \times 2 \\
 \hline
 [(-3) \times 3 + 1 \times 2]x \\
 \hline
 -7x
 \end{array}$$

所以  $3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2)$



### 教材內容說明：

1. 本教材第 19～27 頁的教學重點是幫助學生理解十字交乘法作整係數二次多項式(二次項係數不為 1)的因式分解。

2. 子問題③：給定  $3x^2 + 17x - 6$

步驟三：利用十字交乘法檢驗一次項係數。

第三次檢驗：常數項  $(-1) \times 6$

得到一次項係數為  $(-1) \times 3 + 1 \times 6 = 3$ ，與題目不相同。

第四次檢驗：常數項  $6 \times (-1)$

得到一次項係數為  $6 \times 3 + 1 \times (-1) = 17$ ，與題目相同。

所以  $3x^2 + 17x - 6 = (x + 6)(3x - 1)$ 。

3. 子問題④：給定  $3x^2 - 7x - 6$

教師幫助學生和子問題③比較，發現只有一次項的係數不同。所以解題的步驟一和步驟二和子問題③相同，直接進入步驟三。

步驟三：利用十字交乘法檢驗一次項係數時，在步驟二已經檢查過的分解方式不用再檢查，

從  $-6 = 2 \times (-3) = (-2) \times 3$  開始檢查。

第一次檢驗：常數項  $2 \times (-3)$

得到一次項係數為  $2 \times 3 + 1 \times (-3) = 3$ ，與題目不相同。

第二次檢驗：常數項  $(-3) \times 2$

得到一次項係數為  $(-3) \times 3 + 1 \times 2 = -7$ ，與題目相同。

所以  $3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2)$ 。



基本學習內容：AC-8-5-1、2、3 提公因式、乘法公式、十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解



### 小試身手

(1) 連連看，找出多項式的因式分解。答：如下圖

$7x^2 + 139x - 20$		$(7x - 5)(x + 4)$
$7x^2 - 68x - 20$		$(x - 10)(7x + 2)$
$7x^2 - 4x - 20$		$(7x + 10)(x - 2)$
$7x^2 + 23x - 20$		$(x + 20)(7x - 1)$

(2) ①  $5x^2 + ( )x + 12$  的因式分解為  $(5x - 4)(x - 3)$ ，請問  $( )$  內要填多少？

②  $3x^2 + ( )x - 70$  的因式分解為  $(x + 7)(3x - 10)$ ，請問  $( )$  內要填多少？

答：① -19 ② 11

(3) 利用十字交乘法因式分解下列各題：

①  $5x^2 - 28x - 12$

②  $5x^2 - 17x + 12$

③  $7x^2 - x - 8$

④  $7x^2 - 18x + 8$

答：①  $(x - 6)(5x + 2)$  ②  $(x - 1)(5x - 12)$

③  $(x + 1)(7x - 8)$  ④  $(x - 2)(7x - 4)$



**教材內容說明：**

1. 本頁小試身手針對十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解進行練習。
2. 第(1)題給定左邊二次項係數相等的多項式，學生能利用十字交乘法檢驗一次項係數並找到多項式的因式分解。
3. 第(2)題包含 2 個子問題。學生能利用十字交乘法計算( )的值。
4. 第(3)題包含 4 個子問題。學生能利用十字交乘法三個步驟，將多項式作因式分解。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

