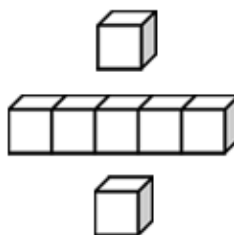


基本學習內容：NC-8-1-1

二次方根的意義及化簡

班級：_____

姓名：_____



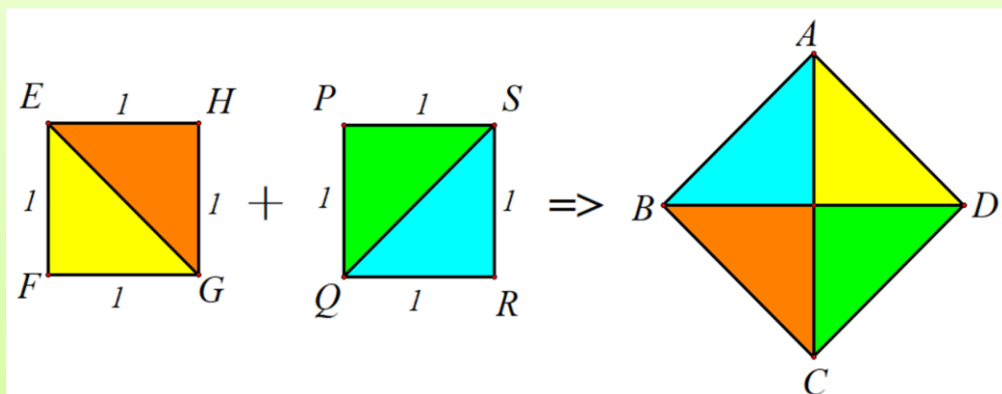
◎二次方根的意義

(1) 已知有一個正方形的邊長為 2，請問其面積為何？

解：正方形面積＝邊長 \times 邊長＝ $2\times 2=4$ 。

(2) 如下圖，已知正方形 $EFGH$ 及正方形 $PQRS$ ，它們的邊長皆為 1。

- ① 請問正方形 $EFGH$ 及 $PQRS$ 的面積和為多少？
- ② 如果把正方形 $EFGH$ 及 $PQRS$ 切割成四個小等腰直角三角形重新組成正方形 $ABCD$ ，請問 $ABCD$ 的面積為多少？
- ③ 根據上述正方形 $ABCD$ 的面積，請你計算 $ABCD$ 的邊長是多少？



解：

- ① 正方形 $EFGH$ 及 $PQRS$ 的面積皆為 $1\times 1=1$ ，故其面積和為 $1+1=2$
- ② 正方形 $ABCD$ 的面積也是 2
- ③ 由正方形的面積公式「正方形面積＝邊長的平方」來討論 $ABCD$ 邊長的大小

(a) 如果邊長是整數：

因為 $1^2=1$ ， $2^2=4$ ，所以 $1^2 < 2 < 2^2$ ，得到 $1 < \text{邊長} < 2$

由上可知邊長一定不是整數。



(b) 如果邊長是一位小數：

因為 $1.4^2 = 1.96$ ， $1.5^2 = 2.25$ ，所以 $1.4^2 < 2 < 1.5^2$ ， $1.4 < \text{邊長} < 1.5$

如果邊長是二位小數：

因為 $1.41^2 = 1.9881$ ， $1.42^2 = 2.0164$ ，所以 $1.41^2 < 2 < 1.42^2$ ， $1.41 < \text{邊長} < 1.42$

由上可知，因為小數的平方一定是小數，所以邊長一定不是小數。

(c) 如果邊長是 $\frac{b}{a}$ (a, b 為正整數且沒有共質因數)

(c-1) 如果邊長的分母是 3：

因為 $(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$ ， $(\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9}$ ， $\frac{16}{9} < 2 < \frac{25}{9}$ ，所以邊長的分母一定不是 3

(c-2) 如果邊長的分母是 7：

$(\frac{9}{7})^2 = \frac{81}{49}$ ， $(\frac{10}{7})^2 = \frac{100}{49}$ ， $\frac{81}{49} < 2 < \frac{100}{49}$ ，所以邊長的分母一定不是 7

依此類推，因為 a, b 沒有共同質因數，可知 a^2 和 b^2 也沒有共同質因數，

所以 $\frac{b^2}{a^2}$ 不會等於 2。

由(a)、(b)、(c)可知，面積為 2 的正方形，它的邊長不會是整數、小數及分數。

依據數學定義，我們把面積為 2 的正方形，將其邊長記為 $\sqrt{2}$ （唸作根號 2）。

像這樣有帶根號的式子都稱為「**根式**」。例如： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、...

(3) 請問 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = ?$

解： $\sqrt{2}$ 代表面積為 2 的正方形邊長，由邊長 \times 邊長＝正方形面積得到 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$



依此類推：

面積為 5 的正方形，其邊長為 $\sqrt{5}$ ，

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5$$

面積為 3.2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{3.2}$ ，

$$\sqrt{3.2} \times \sqrt{3.2} = (\sqrt{3.2})^2 = 3.2$$

面積為 $\frac{3}{2}$ 的正方形，其邊長為 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ，

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

- (1) 依據數學定義，面積為 a 的正方形，其邊長記為 \sqrt{a} ，
正方形的面積可表為 $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$ ，故 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。
- (2) 假設正方形的面積為 0，則正方形邊長也會為 0，
得到 $\sqrt{0} = 0$ 。
- (3) 因為正方形面積不為負數，若 $a \geq 0$ ， \sqrt{a} 有意義；
若 $a < 0$ ，則 \sqrt{a} 無意義。



隨堂練習

計算下列各數：(1) $(\sqrt{10})^2$ (2) $(\sqrt{2.25})^2$ (3) $\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2$



(4) 試比較 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 的大小

解：

$\sqrt{2}$ 相當於面積為2的正方形其邊長， $\sqrt{3}$ 相當於面積為3的正方形其邊長
 $\sqrt{5}$ 相當於面積為5的正方形其邊長。由面積愈大的正方形，其邊長也愈大，
 因為 $2 < 3 < 5$ ，所以 $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5}$



隨堂練習

比較下列兩數的大小並在□中填入>、<或=

(1) $\sqrt{35}$ □ $\sqrt{24}$ (2) $\sqrt{\frac{17}{4}}$ □ $\sqrt{\frac{25}{6}}$

(5) 請問 $\sqrt{\square} = 4$ ，請問□要填入哪一個數？

解：

面積為□的正方形其邊長記為 $\sqrt{\square}$ ，因為 $\sqrt{\square} = 4$ ，所以正方形面積 $\square = 4 \times 4 = 16$



隨堂練習

請問 $\sqrt{\square} = 6$ ，請問□要填入哪一個數？



基本學習內容：NC-8-1-1

◎ \sqrt{a} 的值 (a 為完全平方數)

(6) 算算看，請在下列表格中的空格填入適當的數。

正方形的邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正方形的面積	1	4	9							

解：利用正方形面積=邊長×邊長，完成下列表格

正方形的邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正方形的面積	1	4	9	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 6 = 36$	$7 \times 7 = 49$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 9 = 81$	$10 \times 10 = 100$

(7) ①在 1 到 10 當中，哪些數可以寫成一個正整數的平方？

②觀察下表，還有哪些數也可以寫成一個正整數的平方？

正方形的邊長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正方形的面積	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

解：

① 因為 $1=1 \times 1=1^2$ ， $4=2 \times 2=2^2$ ， $9=3 \times 3=3^2$ ，

所以 1 到 10 當中，1、4、9 可以寫成一個正整數的平方。

② 因為 $16=4^2$ 、 $25=5^2$ 、 $36=6^2$ 、 $49=7^2$ 、 $64=8^2$ 、 $81=9^2$ 、 $100=10^2$

所以 16、25、36、49、64、81、100 也可以寫成一個正整數的平方。

一個正整數若可以寫成某個正整數的平方，我們就稱這個數為「**完全平方數**」，例如： $1=1^2$ 、 $4=2^2$ 、 $9=3^2$ 、 $16=4^2$ 、 $100=10^2$ 所以 1、4、9、16、25、100 都是完全平方數。





(8) 請問下列哪些算式的結果是完全平方數？

- ① 23^2 ② 13×13 ③ $5 \times 5 \times 5 \times 5$ ④ $2 \times 3 \times 6$ ⑤ 7^3 ⑥ 2×2^2

解：

- ① 23^2 是完全平方數。
 ② $13 \times 13 = 13^2$ ，所以 13×13 是完全平方數。
 ③ $5 \times 5 \times 5 \times 5 = (5 \times 5) \times (5 \times 5) = 25^2$ ，所以 $5 \times 5 \times 5 \times 5$ 是完全平方數。
 ④ $2 \times 3 \times 6 = 2 \times 3 \times (2 \times 3) = 6 \times 6 = 6^2$ ，所以 $2 \times 3 \times 6$ 是完全平方數。
 ⑤ $7^3 = 7^2 \times 7^1$ ，因為 7^3 無法寫成某個正整數的平方，所以 7^3 不是完全平方數。
 ⑥ 因為 2×2^2 無法表示成某個正整數的平方，所以 2×2^2 不是完全平方數。



$\sqrt{\text{正方形面積}} = \text{正方形的邊長}$

$\sqrt{(\text{正方形邊長})^2} = \text{正方形的邊長}$

由上可知：

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \quad \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4,$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

若 a 為正數，邊長為 a 的正方形其面積為 a^2 ；另外面積為 a^2 的正方形，其邊長可寫為 $\sqrt{a^2}$ 。所以 $\sqrt{a^2} = a$ ($a > 0$)
 對於一個正數 a ， $\sqrt{a^2} = a$ 。



(9) 已知 $12^2 = 144$ ， $13^2 = 169$ ， $14^2 = 196$ ， $15^2 = 225$

請問① $\sqrt{144} = ?$ ② $\sqrt{225} = ?$

解：① $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

② $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$



隨堂練習

已知 $15^2 = 225$ ， $16^2 = 256$ ， $17^2 = 289$ ，請比較 $\sqrt{225}$ 、 16 、 $\sqrt{17^2}$ 三數的大小關係？



小試身手

- (1) ①面積為 15 的正方形，其邊長為何？
②邊長為 $\sqrt{10}$ 的正方形，其面積為何？
- (2) 請問 $\sqrt{\square} = 9$ ，請問 \square 要填入哪一個數？
- (3) 已知 $17^2 = 289$ 、 $18^2 = 324$ ， $19^2 = 361$ ，請問
 - ① $\sqrt{324} = ?$
 - ②比較 $\sqrt{289}$ 、 18 、 $\sqrt{19^2}$ 三數的大小關係？



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8

年級數學

