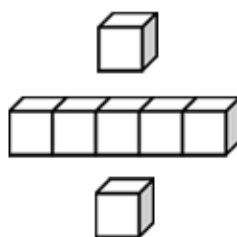


基本學習內容：SC-8-5-1

三角形的全等性質 SAS、SSS、 ASA、AAS、RHS

班級：_____

姓名：_____



◎複習活動：

三角形 ABC 透過平移、旋轉、翻轉後，可以和三角形 DEF 完全疊合在一起，我們稱三角形 ABC 和三角形 DEF 全等。



三角形 ABC 和三角形 DEF 全等時，為了方便表示 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，我們將其記為 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

$\angle A$ 和 $\angle D$ 疊合，我們稱 $\angle A$ 和 $\angle D$ 互為對應角， $\angle B$ 和 $\angle E$ 、 $\angle C$ 和 $\angle F$ 也為對應角。

\overline{AB} 和 \overline{DE} 疊合，我們稱 \overline{AB} 和 \overline{DE} 互為對應邊， \overline{AC} 和 \overline{DF} 、 \overline{BC} 和 \overline{EF} 也為對應邊。



(1)想想看，兩三角形全等時，三個對應邊等長，三個對應角相等。
若知道有三個對應邊等長，兩個對應角相等，請問這兩個三角形會全等嗎？

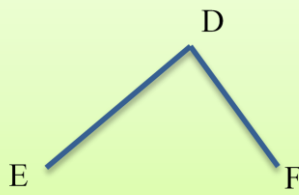
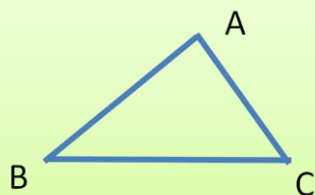
會啊。三角形內角和 180 度，若三個內角知道了其中兩個，另一個角當然也會一樣，因此兩個三角形會相等。



要判定兩個三角形是否全等時，不一定要指出全部六個條件都一樣，才能說兩個三角形全等。



(2) 給定一個 $\triangle ABC$ ，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 兩條件，試問再增加哪一個條件，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。



解 1：製作相等的第三邊

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{AC} 一樣長的扣條 \overline{DF} 。
2. 再控制扣條使得 E 、 F 兩點間的距離等於 \overline{BC} 長，得到 $\triangle DEF$ 。
3. 最後移動 $\triangle DEF$ ，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。
4. 所以只要知道兩個三角形的三組對應邊等長，這兩個三角形就會全等。

用三組對應邊等長，判斷三角形全等的方法，稱為 *SSS* 全等。



為了方便表示三角形的邊，我們用記號 S 代表邊 (Side)



解 2：製作相等的夾角

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{AC} 一樣長的扣條 \overline{DF}
2. 再控制扣條使得 $\angle A = \angle D$ ，得到 $\triangle DEF$ 。
3. 最後移動 $\triangle DEF$ ，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。

所以只要知道兩個三角形的二組對應邊等長及其所夾的對應角也相等，這兩個三角形就會全等。

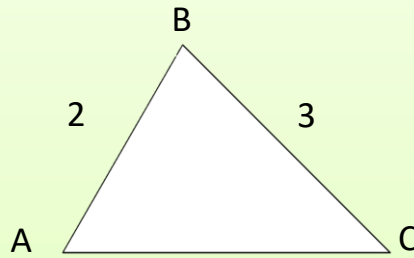
我們用二組對應邊等長及其所夾的對應角也相等，判斷三角形全等的方法，稱為 *SAS* 全等。



為了方便表示三角形的邊與角，我們用記號 S 代表邊 (Side)， A 代表角 (Angle)。



(3)如下圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 3$ 。 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 75^\circ$ 、 $\angle C = 45^\circ$ 。



①今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\overline{DE} = 2$ ， $\overline{EF} = 3$ ，且 $\overline{DF} = \overline{AC}$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？

②今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\overline{DE} = 2$ ， $\overline{EF} = 3$ ，且 $\angle E = 75^\circ$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？

解：

①選取 $\overline{AB} = 2$ 和 $\overline{DE} = 2$ 為對應邊， $\overline{BC} = 3$ 和 $\overline{EF} = 3$ 為對應邊，

且第三邊 $\overline{AC} = \overline{DF}$ 也等長，

所以三個對應邊都等長，由 SSS 全等性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

②選取 $\overline{AB} = 2$ 和 $\overline{DE} = 2$ 為對應邊， $\overline{BC} = 3$ 和 $\overline{EF} = 3$ 為對應邊，

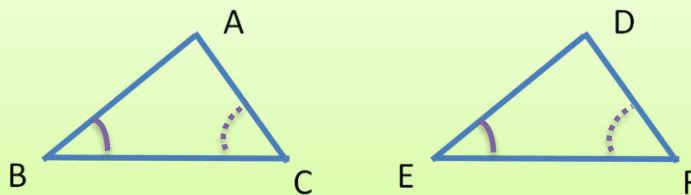
\overline{AB} 與 \overline{BC} 所夾的角為 $\angle B$ 、 \overline{DE} 與 \overline{EF} 所夾的角為 $\angle E$ ，

因為對應角 $\angle B = \angle E = 75^\circ$ 也相等，

所以二組對應邊等長及其所夾的對應角也相等，

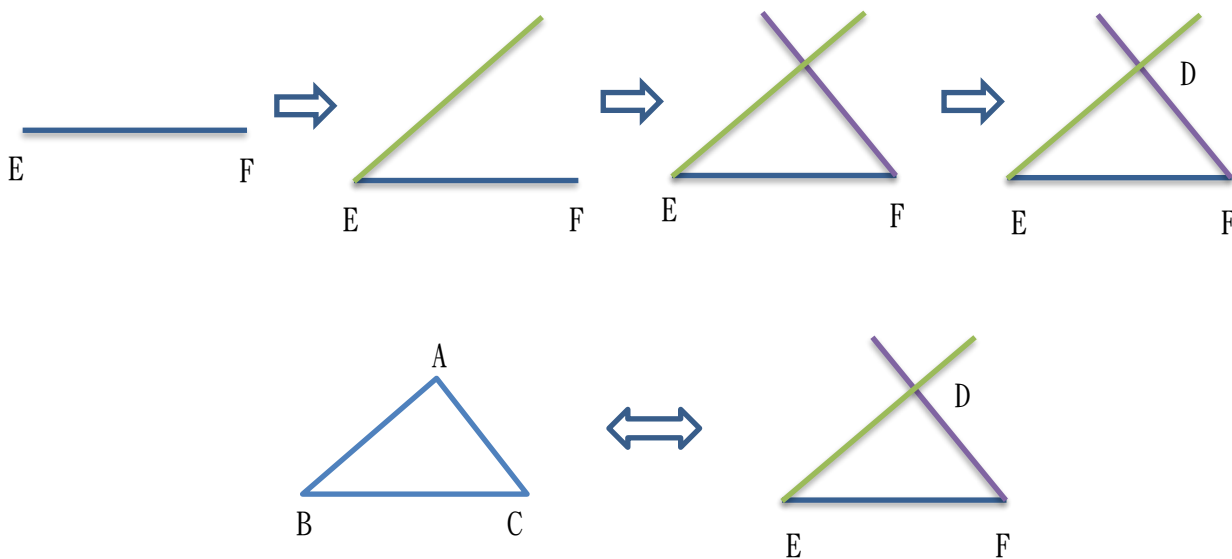
由 SAS 全等性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(4) 給定一個 $\triangle ABC$ ，已知 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ 兩條件，試問再增加哪一個條件，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。



解 1：製作與 \overline{BC} 相等的邊

1. 準備一投影片畫出與 \overline{BC} 等長的邊 \overline{EF} 。
2. 使用量角器，畫出 $\angle E$ 的另一邊，使得 $\angle E = \angle B$ 。
同理，也畫出 $\angle F$ 的另一邊，使得 $\angle F = \angle C$ 。
3. $\angle E$ 與 $\angle F$ 所畫出的兩邊會交於 D 點。
4. 移動投影片，將 \overline{EF} 與 \overline{BC} 疊合，發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等。



所以只要知道兩個三角形的二組對應角相等及所夾的對應邊也等長，這兩個三角形就會全等。



我們用二組對應角相等及其所夾的對應邊也等長，判斷三角形全等的方法，稱為 *ASA* 全等



基本學習內容：SC-8-5-1

解 2：製作與 \overline{AB} (或 \overline{AC}) 相等的邊

當兩個三角形的兩個對應角相等， $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ ，

因三角形的內角和為 180° ，則另一角

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$$

$$\angle D = 180^\circ - (\angle E + \angle F)$$

得知 $\angle A = \angle D$ 。

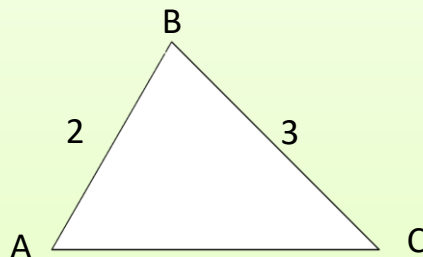
透過上解 ASA 過程，知道兩個三角形的二個對應角相等及其所夾的對應邊也等長，得知這兩個三角形也會全等。

所以只要知道兩個三角形的二組對應角相等及其一鄰邊的對應邊也等長，這兩個三角形也就會全等。



我們用二組對應角相等及一鄰邊的對應邊也等長，判斷三角形全等的方法，稱為 AAS 全等。

(5) 如下圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 3$ 。 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle C = 45^\circ$ 。



① 今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle E = 75^\circ$ ，且 $\overline{DE} = \overline{AB}$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？

② 今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle F = 45^\circ$ ，且 $\overline{DE} = 2$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？



解：

①選取 $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle D = 60^\circ$ 為對應角， $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle E = 75^\circ$ 為對應角，

A 點與 B 點所夾的邊為 \overline{AB} 、 D 點與 E 點所夾的邊為 \overline{DE}

因為對應邊 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 等長

所以兩個三角形的二組對應角相等及所夾的對應邊也等長，由 ASA 全等性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

②選取 $\angle A = 60^\circ$ 和 $\angle D = 60^\circ$ 為對應角， $\angle C = 45^\circ$ 和 $\angle F = 45^\circ$ 為對應角，

A 點與 C 點所夾的邊為 \overline{AC} ， $\angle C$ 的另一個鄰邊為 \overline{AB}

D 點與 F 點所夾的邊為 \overline{DF} ， $\angle F$ 的另一個鄰邊為 \overline{DE}

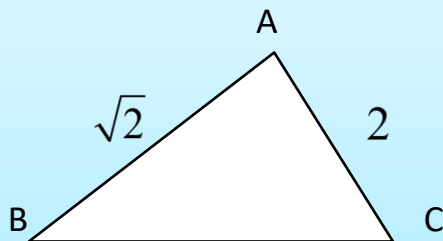
因為對應邊 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 等長

所以兩個三角形的二組對應角相等及其一鄰邊的對應邊也等長，由 AAS 全等性質判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



隨堂練習

如下圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ， $\overline{AC} = 2$ 。 $\angle A = 105^\circ$ 、 $\angle B = 45^\circ$ 、 $\angle C = 30^\circ$ 。



今有另一三角形 $\triangle DEF$ ，已知 $\angle D = 105^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ，且 $\overline{DE} = \overline{BC}$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否全等 $\triangle DEF$ ？並說明是用何種性質判定？

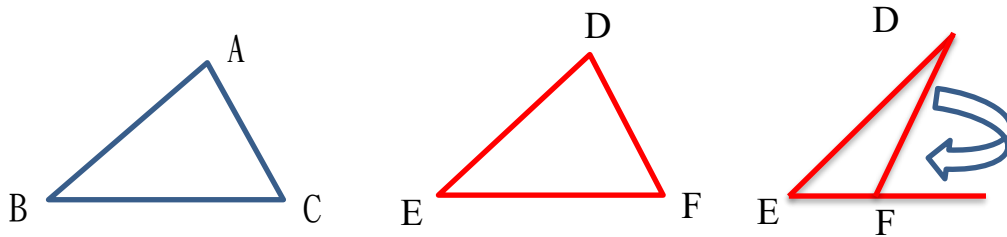
(6) 給定一個 $\triangle ABC$ ，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ 兩條件。

- ① 若 $\angle B = \angle E = 45^\circ$ ，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等嗎？
- ② 若 $\angle B = \angle E = 60^\circ$ ，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等嗎？
- ③ 若 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ，可以使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等嗎？

解

① $\triangle ABC$ 為銳角三角形，若其中 $\angle B = \angle E = 45^\circ$

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{BC} 一樣長的扣條 \overline{EF}
2. 再控制扣條使得 $\angle B = \angle E = 45^\circ$ ，我們可以發現，可做出兩種 $\triangle DEF$ 。

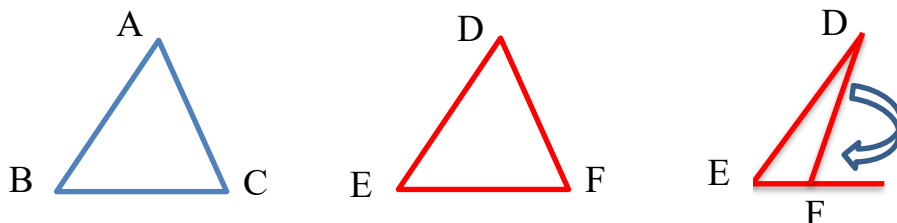


因此可以發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 不會全等。

所以只要知道兩個三角形的二個對應邊等長及其一邊的鄰角對應角相等（即 SSA 性質），這兩三角形不一定會全等。

② $\triangle ABC$ 為銳角三角形，若其中 $\angle B = \angle E = 60^\circ$

1. 準備和 \overline{AB} 一樣長的扣條 \overline{DE} ，以及和 \overline{BC} 一樣長的扣條 \overline{EF}
2. 再控制扣條使得 $\angle B = \angle E = 60^\circ$ ，我們可以發現，仍可做出兩種 $\triangle DEF$ 。

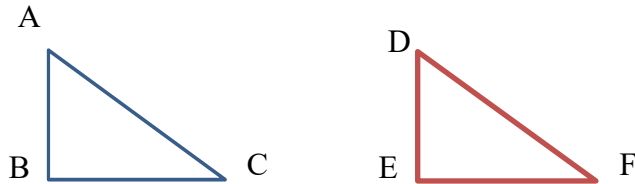


因此可以發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 不會全等。

所以只要知道兩個三角形的二個對應邊等長及其一邊的鄰角對應角相等（即 SSA 性質），這兩三角形不一定會全等。



③



如果有兩個直角三角形的斜邊和一股對應相等，

經由畢氏定理 $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}$ ， $\overline{EF} = \sqrt{\overline{DF}^2 - \overline{DE}^2}$ ，

可以得知另一股 \overline{BC} 、 \overline{EF} 也必定相等。

透過例題 2，知道只要知道兩個三角形的三個對應邊等長，

這兩個三角形就會全等。

所以只要知道兩個直角三角形的斜邊等長，及任一股的對應邊也等長，

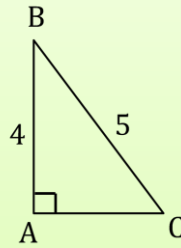
這兩個三角形也就會全等。

我們用兩個直角三角形的斜邊等長及其任一股的對應邊也等長，判斷三角形全等的方法，稱為 *RHS* 全等。



為了方便表示直角三角形的直角和斜邊，我們用記號 *R* 代表直角(Rightangle)，*H* 代表斜邊(Hypotenuse)。

(7) 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ 。

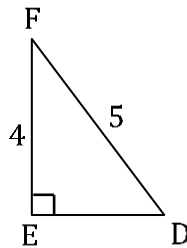


又另一 $\triangle DEF$ 中，已知 $\angle E = 90^\circ$ ， $\overline{EF} = 4$ ， $\overline{DF} = 5$ 。

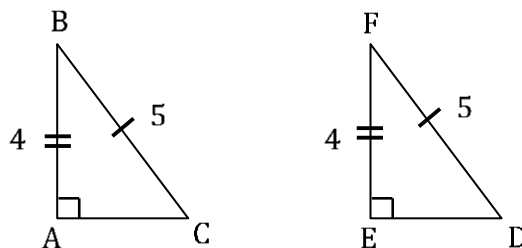
則這兩個三角形是否全等？你是以哪一個全等性質判定的？

解：

依題意繪出 $\triangle DEF$



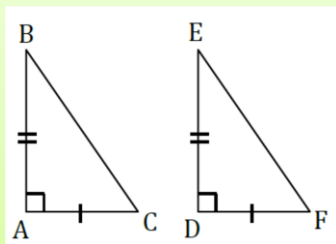
因為 $\overline{AB} = \overline{EF}$ ， $\overline{BC} = \overline{FD}$ ， $\angle A = \angle E = 90^\circ$ ，此時我們可將一樣長的線段和一樣大的角畫上相等的記號，如下圖。



此時我們可利用 RHS 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$



(8)下圖的兩個直角三角形中， $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，此時我們可以利用哪一個全等性質，判定這兩個三角形全等？



解：

$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\angle A = \angle D$

$\angle A$ 為 \overline{AB} 與 \overline{AC} 的夾角

故可利用 SAS 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(9) $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 4$ 。

① 已知在 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AB} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{DE}$ ， $\angle B = \angle D$ ，

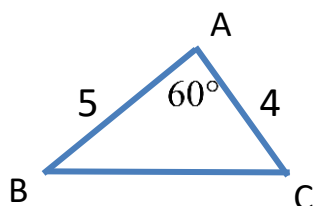
請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle DEF$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

② 已知在 $\triangle PQR$ 中， $\overline{AB} = \overline{PQ}$ ， $\overline{AC} = \overline{PR}$ ， $\angle B = \angle Q$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

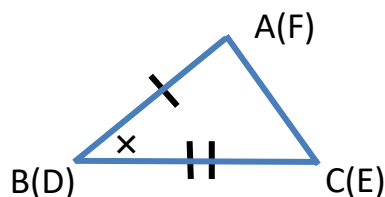
解：

① 依題意繪出 $\triangle ABC$



再依條件 $\overline{AB} = \overline{DF}$ 、 $\overline{BC} = \overline{DE}$ 、

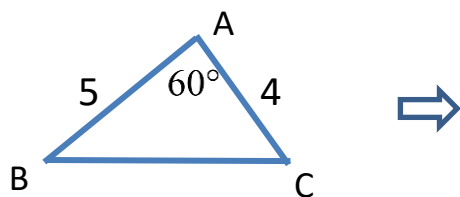
$\angle B = \angle D$ 將記號劃記



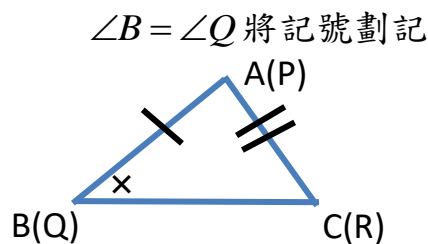
故可利用 SAS 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

基本學習內容：SC-8-5-1

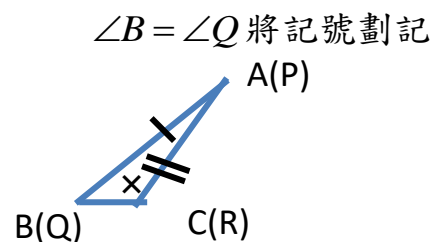
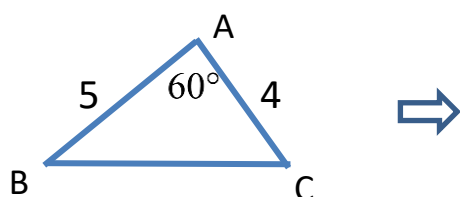
② 方法一、依題意繪出 $\triangle ABC$



再依條件 $\overline{AB} = \overline{PQ}$ 、 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 、



方法二、依題意繪出 $\triangle ABC$



SSA 無法判定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 是否全等。

(10) ①有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ，已知 $\overline{AC} = \overline{FE}$ ， $\angle B = \angle D$ ， $\angle C = \angle E$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle DEF$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

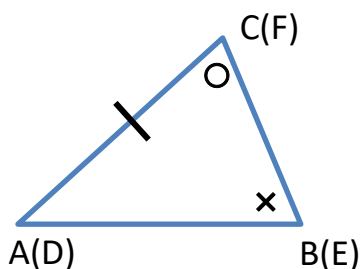
②有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle PQR$ ，已知 $\overline{AC} = \overline{PR}$ ， $\angle A = \angle P$ ， $\angle C = \angle R$ ，

請問 $\triangle ABC$ 是否與 $\triangle PQR$ 全等，你是以哪一個全等性質判定的？

解

①繪出任一三邊不等長的 $\triangle ABC$ ，再依條件 $\overline{AC} = \overline{FE}$ 、 $\angle B = \angle D$ 、 $\angle C = \angle E$

將記號劃記

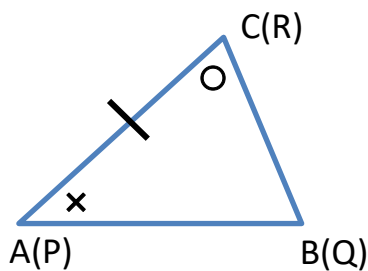


故可利用 AAS 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



②繪出任一三邊不等長的 $\triangle ABC$ ，再依條件 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 、 $\angle A = \angle P$ 、 $\angle C = \angle R$

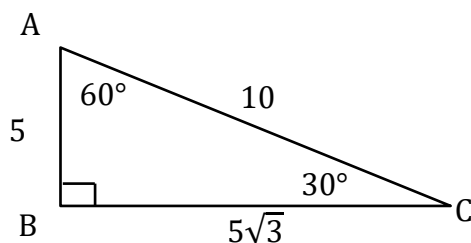
將記號劃記



故可利用 ASA 全等性質，判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



小試身手



請判別下列三角形是否和 $\triangle ABC$ 全等，如果全等，請打「✓」，並註明所利用的全等性質，如果無法確定是否全等，請打「×」。

例：

(✓) RHS : $\triangle DEF$ 中， $\angle E = 90^\circ$ ， $\overline{DF} = 10$ ， $\overline{DE} = 5$ 。

() _____ : 1. $\triangle GHI$ 中， $\overline{GI} = 10$ ， $\overline{GH} = 5$ 。

() _____ : 2. $\triangle JKL$ 中， $\angle J = 60^\circ$ ， $\angle L = 30^\circ$

() _____ : 3. $\triangle MNP$ 中， $\overline{MP} = 10$ ， $\overline{MN} = 5$ ， $\overline{NP} = 5\sqrt{3}$ 。

() _____ : 4. $\triangle QRS$ 中， $\angle Q = 60^\circ$ ， $\overline{QS} = 10$ ， $\overline{QR} = 5$ 。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

