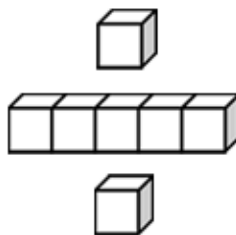


# 基本學習內容：SC-8-7-1

## 正三角形的高與面積求法

班級：\_\_\_\_\_

姓名：\_\_\_\_\_



## ◎複習三角形面積公式

(1) 已知 $\triangle ABC$ 的底為20、高為底的一半，則三角形的面積為何？

解：

$$\text{高} = 20 \div 2 = 10$$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \text{底} \times \text{高} \div 2 = 20 \times 10 \div 2 = 100$$

◎三角形面積 = 底 $\times$ 高 $\div 2$ ，也可以寫成三角形面積 =  $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$



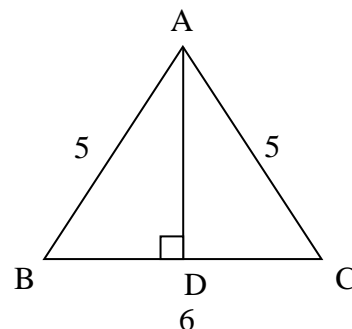
## ◎複習畢氏定理

(2) 如右圖，已知等腰 $\triangle ABC$ 三邊長為5、5、6，

$\overline{BC}$ 邊上的高為 $\overline{AD}$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{AD} = ?$

(b)  $\triangle ABC$ 的面積 = ?



解：

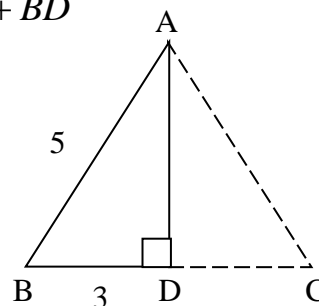
(a) 等腰三角形是對稱圖形，所以 $\overline{AD}$ 會平分 $\overline{BC}$ ，則 $\overline{BD} = \overline{CD} = 3$

如右圖，直角 $\triangle ABD$ 三邊長滿足 $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$

$$\text{所以 } 5^2 = \overline{AD}^2 + 3^2$$

$$\overline{AD}^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16,$$

$$\overline{AD} = 4 \text{ (負不合)}$$



$$(b) \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



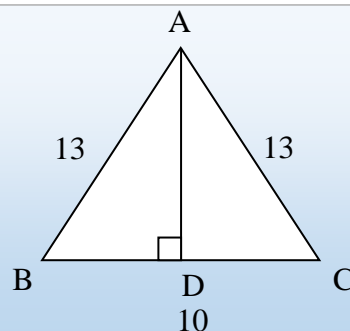
## 隨堂練習

如右圖，已知等腰 $\triangle ABC$  三邊長為 13、13、10，

$\overline{BC}$  邊上的高為  $\overline{AD}$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{AD} = ?$

(b)  $\triangle ABC$  的面積 = ?



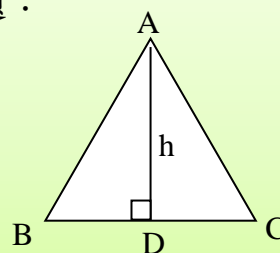
## ◎正三角形的高與面積

(3)如右圖，已知正 $\triangle ABC$  邊長為 8，高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{BD} = ?$

(b)  $h = ?$

(c) 正 $\triangle ABC$  的面積 = ?



解：

(a)  $\overline{BD} = 8 \div 2 = 4$

(b) 因為 $\triangle ABD$  為直角三角形，所以三邊長滿足畢氏定理

也就是  $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$  ( $\overline{AD} = h$ )

將  $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{BD} = 4$  代入上式

所以  $8^2 = 4^2 + h^2$ ， $h^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$

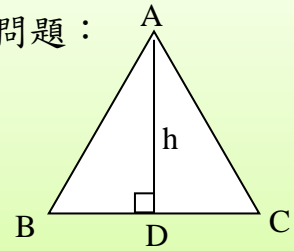
$h = \sqrt{48} = \sqrt{4 \times 4 \times 3} = 4\sqrt{3}$

(c) 正 $\triangle ABC$  的面積 =  $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$   
 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

(4) 如右圖，已知正 $\triangle ABC$  邊長為 5，高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $h = ?$

(b) 正 $\triangle ABC$  的面積 = ?



解：

(a) 如右圖，求  $h$  前先找直角 $\triangle ABD$  的三邊邊長

因為 $\triangle ABD$  為直角三角形，所以三邊長滿足畢氏定理

也就是  $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$  ( $\overline{AD} = h$ )

將  $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BD} = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$  代入上式

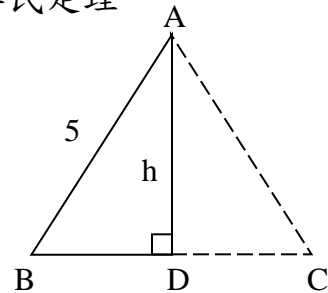
$$\text{所以 } 5^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + h^2,$$

$$h^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5^2 - \frac{1}{4} \times 5^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times 5^2 = \frac{3}{4} \times 5^2,$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4} \times 5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5}{2} \sqrt{3}$$

(b) 正 $\triangle ABC$  的面積 =  $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 5\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2 = \frac{25}{4} \sqrt{3}$$

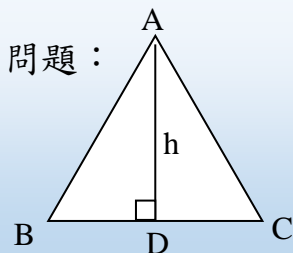


隨堂練習

如右圖，已知正 $\triangle ABC$  邊長為 10，高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $h = ?$

(b) 正 $\triangle ABC$  的面積 = ?





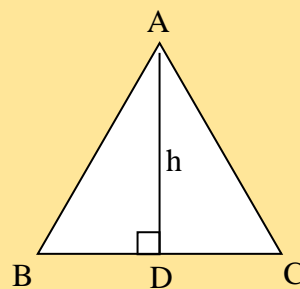
已知正 $\triangle ABC$  的邊長為  $a$ ， $\overline{BC}$  邊上的高為  $h$

### ◎正三角形高的求法

因為 $\triangle ABD$  為直角三角形，所以  $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + h^2$

將  $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BD} = \frac{1}{2}a$  代入上式，所以  $a^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + h^2$

$$\text{則 } h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad , \quad h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



### ◎正三角形面積的求法

正 $\triangle ABC$  的面積  $= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$

將  $\overline{BC} = a$ 、 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  代入上式

$$\text{則正}\triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

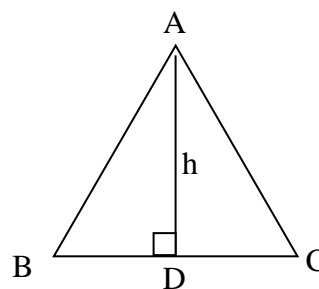


### 重點整理

已知正 $\triangle ABC$  的邊長為  $a$ ，任一邊上的高為  $h$ ，

則 (1) 正 $\triangle ABC$  的高  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) 正 $\triangle ABC$  的面積  $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$





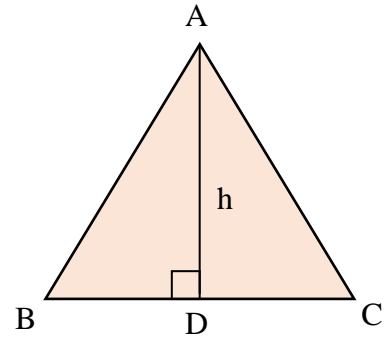
小試身手

(1) 如右圖，已知正 $\triangle ABC$  邊長為 12，高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $\overline{BD} = ?$

(b)  $h = ?$

(c) 正 $\triangle ABC$  的面積 = ?



(2) 已知正 $\triangle DEF$  邊長為 20，且  $\overline{EF}$  邊上的高為  $h$ ，請回答下列問題：

(a)  $h = ?$

(b) 正 $\triangle DEF$  的面積 = ?





教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

