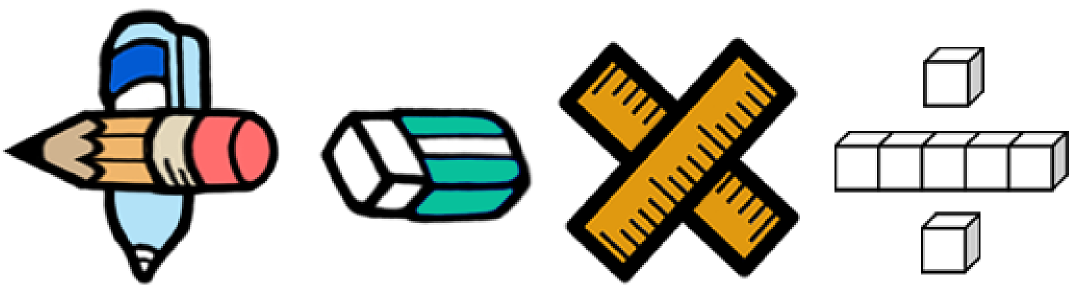
基本學習內容：SC-8-9-1

平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質

班級：__________

姓名：__________

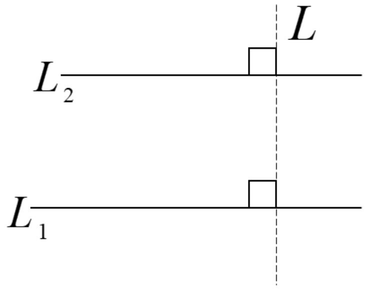


教育部國民及學前教育署 編

中華民國 111 年 8 月

複習活動：平行的意義

有一直線 L 同時垂直於 L_1 和 L_2，如圖(一)，則我們稱 L_1 和 L_2 互相平行，記作 $L_1 // L_2$。



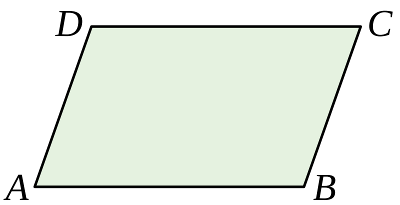
圖(一)

複習活動：平行四邊形的意義

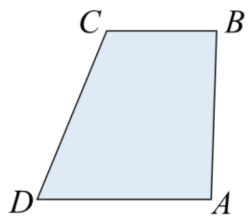
四邊形會有兩組對邊。

如果這兩組對邊都分別平行，則稱為**平行四邊形(圖二)**。

如果只有一組對邊平行，另一組對邊不平行，則稱為**梯形(圖三)**。



圖(二)

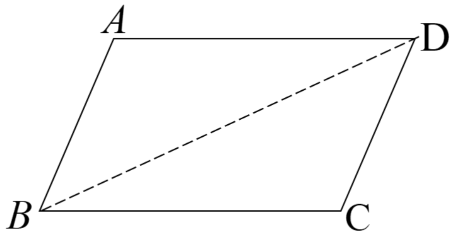


圖(三)

如圖(二)四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} // \overline{BC}$，像這樣**兩組對邊分別平行的四邊形，稱為平行四邊形**，記作「$\square ABCD$」，讀作「平行四邊形 $ABCD$」。我們約定頂點標記時，必須以順時針或逆時針依序標記，例如$\square ADCB$ 也可以使用。

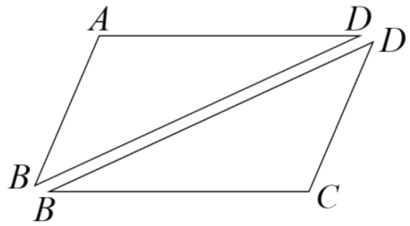
複習活動：對邊等長

將圖(四)平行四邊形▱$ABCD$，沿$\overline{BD}$剪開，
再將ΔABD與ΔCDB疊合在一起。
你有甚麼發現?

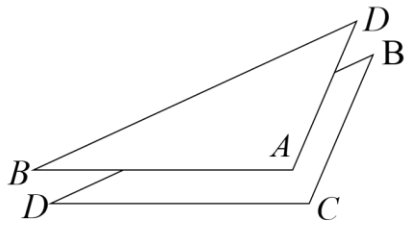


圖(四)

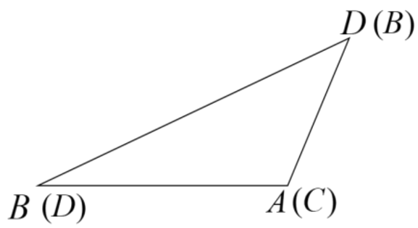
①沿$\overline{BD}$剪開，得到ΔABD與ΔCDB。



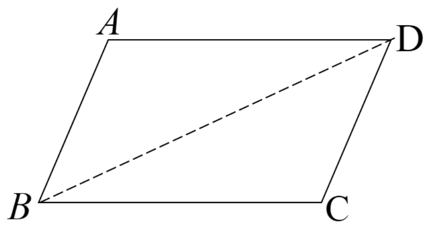
②將△ABD旋轉$180°$，
得到兩個疊在一起的三角形。



③得到△ABD和△CDB全等。

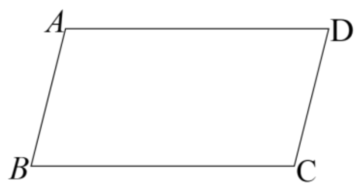


由ΔABD與ΔCDB全等，可以發現
(1) $\overline{AD}$和$\overline{BC}$等長。
(2) $\overline{AB}$和$\overline{CD}$等長。

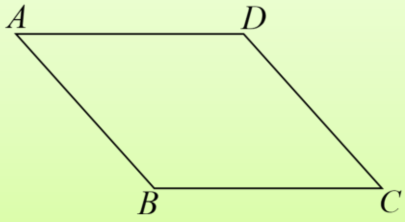


重點整理

平行四邊形▱$ABCD$的兩組對邊等長。
即，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$。



(1) 如圖，平行四邊形▱$ABCD$中，已知$\overline{AB}=7$，$\overline{AD}=6$，請問$\overline{CD}$、$\overline{BC}$分別為何？

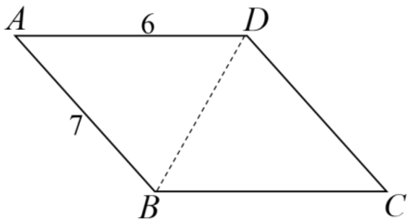


解：

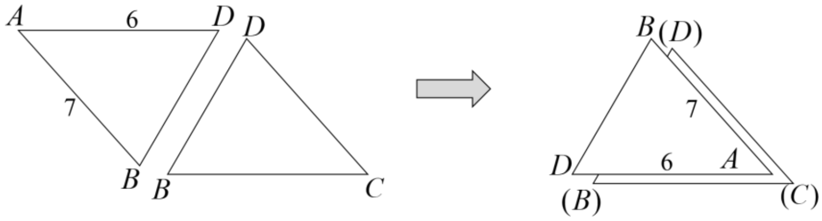
(方法一)

① 將平行四邊形$ABCD$從$\overline{BD}$切開，

可以得到兩個三角形△ABD和△CDB。

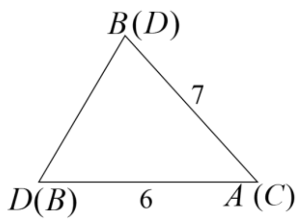


②將△ABD旋轉180°，得到兩個疊在一起的三角形。



③得到△ABD和△CDB全等，

所以$\overline{AB}=\overline{CD}=7$，$\overline{AD}=\overline{BC}=6$。



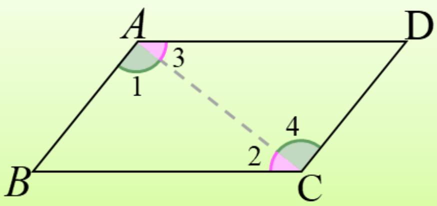
(方法二)

因為平行四邊形$ABCD$的兩組對邊等長，

所以$\overline{AB}=\overline{CD}=7$，$\overline{AD}=\overline{BC}=6$。

答：$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=7$

(2) 如圖，$\overline{AC}$ 為平行四邊形▱$ABCD$ 的對角線，
試說明 $\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$。



說明： 在△ABC與△CDA中，

因為 $\overline{AB}//\overline{CD}$，所以 $\angle 1=\angle 4$(內錯角相等)，

因為 $\overline{AD}//\overline{BC}$，所以 $\angle 2=\angle 3$(內錯角相等)，

且 $\overline{AC}=\overline{AC}$(公用邊)，故△$ABC\cong$△$CDA$ (ASA 全等性質)。

所以 $\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$。

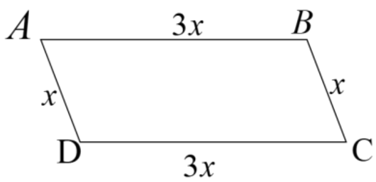
(3) 如圖，已知平行四邊形▱$ABCD$
的周長為 24 公分，$\overline{CD}=3\overline{AD}$，
則各邊的長度分別為多少公分?

解： 由於平行四邊形的對邊等長，

設 $\overline{AD}=x$ 公分，$\because \overline{BC}=\overline{AD}$，$\therefore \overline{BC}=x$

$\because \overline{CD}=3\overline{AD}=3x$，又 $\overline{CD}=\overline{AB}$，

$\therefore \overline{CD}=\overline{AB}=3x$ 公分



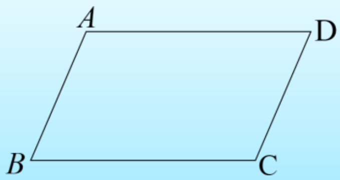
則周長 $x+3x+x+3x=24$，得 $8x=24$，故 $x=3$。

故 $\overline{AD}=\overline{BC}=3$ 公分，$\overline{CD}=\overline{AB}=9$ 公分。

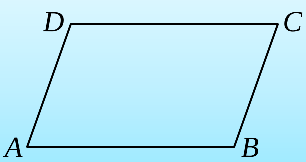
答：$\overline{AD}=\overline{BC}=3$ 公分，$\overline{CD}=\overline{AB}=9$ 公分。

隨堂練習

(1)▱$ABCD$ 中，$\overline{BC}$ 比 $\overline{AB}$ 的 2 倍多 5 公分，
$\overline{AD}$ 比 $\overline{CD}$ 的 3 倍少 6 公分，
則▱$ABCD$ 的周長為多少公分?

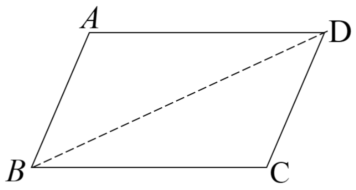


(2)▱$ABCD$ 為平行四邊形，$\overline{BC}=11$，$\overline{AB}=16$，
請問 $\overline{AD}$、$\overline{CD}$ 分別為何?



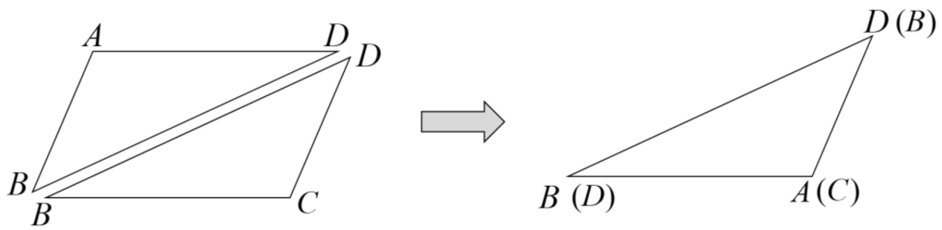
複習活動：對角相等

1. 將圖(五)平行四邊形▱$ABCD$，沿 $\overline{BD}$ 剪開，
   再將△ABD 與△BCD 疊合在一起。
   你有甚麼發現?



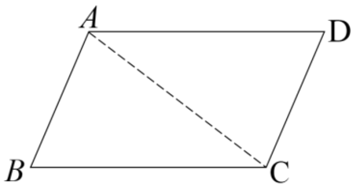
圖(五)

①沿 $\overline{BD}$ 剪開，得到△ABD 與△BCD，將△ABD 旋轉180°，兩個三角形疊在一起，得到∠A與∠C 完全疊合。



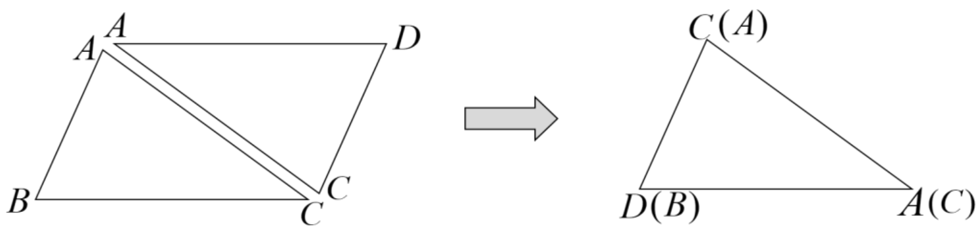
②由此我們可以發現， ∠A=∠C 。

2. 將圖(六)平行四邊形▱$ABCD$，沿 $\overline{AC}$ 剪開，
   再將△ABC 與△ADC 疊合在一起。
   你有甚麼發現?



圖(六)

①沿 $\overline{AC}$ 剪開，得到△ADC 與△ABC，將△ADC 旋轉180°，兩個三角形疊在一起，得到∠B 與∠D 完全疊合。



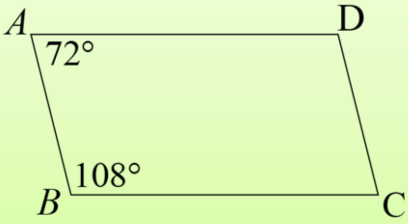
②由此我們可以發現， ∠B＝∠D。

重點整理

平行四邊形$ABCD$的兩組對角分別相等。即∠A＝∠C，∠B＝∠D。

(4)如圖，已知▱$ABCD$ 為平行四邊形，$\angle A=72°$，$\angle B=108°$，

求$\angle C$、$\angle D$ 的度數分別為何?



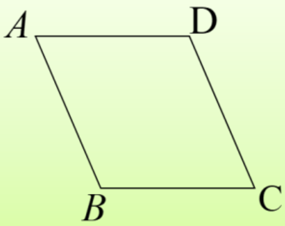
解： 因為▱$ABCD$ 為平行四邊形，所以兩組對角分別相等。

$\therefore \angle C=\angle A=72°$，$\angle D=\angle B=108°$

答： $\angle C=72°$，$\angle D=108°$

(5)如圖，已知▱$ABCD$ 為平行四邊形，

試說明$\angle A=\angle C$ ，$\angle B=\angle D$ 。



說明:

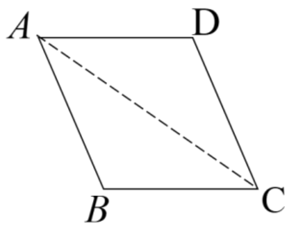
①因為 ▱$ABCD$ 為平行四邊形，連$\overline{AC}$

在△ABC 與△CDA 中，

因為 $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

所以 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$ (SSS)，

得$\angle B=\angle D$ 。

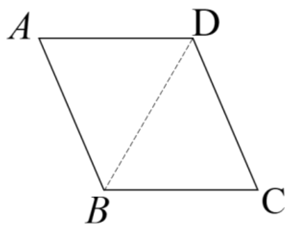


②同理，連$\overline{BD}$，

因為 $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{BD}$ ，

△ABD $\cong$△CDB (SSS)，

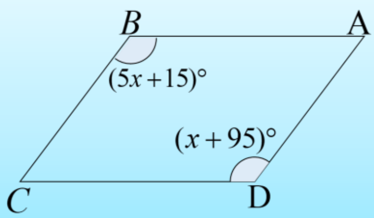
得$\angle A=\angle C$ 。



隨堂練習

如圖，▱$ABCD$ 中，$\angle B=(5x+10)°$、

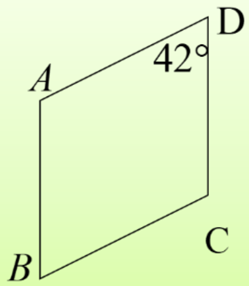
$\angle D=(x+95)°$ ，請問$\angle C$ 的度數為何?



活動一：鄰角互補

(6)已知▱$ABCD$ 為平行四邊形且 $\angle D=42^\circ$，

求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度數分別為何?



解：因為▱$ABCD$ 為平行四邊形，所以 $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$(對角相等)。

故 $\angle B=\angle D=42^\circ$

且四邊形內角和為 360°，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$

$\angle A+42^\circ+\angle C+42^\circ=360^\circ$

$\angle A+\angle C=276^\circ$

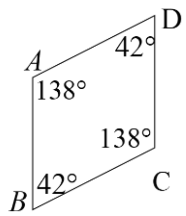
因為 $\angle A=\angle C$　　所以 $\angle A=\angle C=276^\circ\div 2=138^\circ$

答：$\angle A=138^\circ$，$\angle C=138^\circ$，$\angle B=42^\circ$。

結論: 由第(6)題，我們發現

$\angle A+\angle B=180^\circ$，$\angle A+\angle D=180^\circ$，

$\angle C+\angle D=180^\circ$，$\angle C+\angle B=180^\circ$。

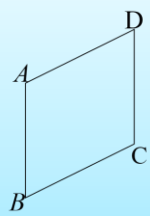


即　平行四邊形的每一個角和它的鄰角都互補，稱為「平行四邊形的鄰角互補」。

隨堂練習

▱$ABCD$ 為平行四邊形，$\angle C=2\angle B$，

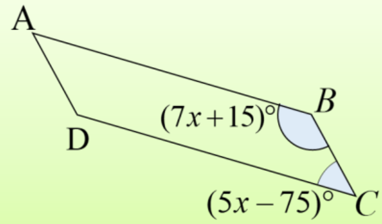
請問$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$的度數分別為何?



(7) 如圖，▱$ABCD$ 中，

$\angle B=(7x+15)°$，$\angle C=(5x-75)°$，

請問$\angle C$的度數為何?



解：

①∵$ABCD$ 為平行四邊形

∴每一個角與它的鄰角都互補。

②∴$\angle B+\angle C=180°$

③ $(7x+15)+(5x-75)=180$

$12x=240$

$x=20$

④ $\angle C=(5x-75)°=5\times20-75=25°$

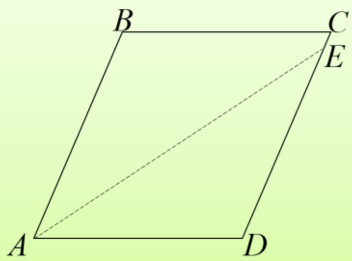
答：$\angle C=25°$

隨堂練習

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，已知$\angle A+\angle C=100°$，

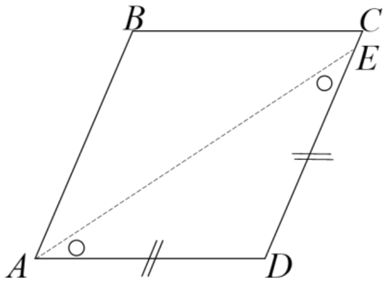
求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$的度數。

(8)如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，連接 $\overline{AE}$，已知 E 為 $\overline{CD}$ 上的一點且 $\overline{AD}=\overline{DE}$，若 $\angle C=40°$，求 $\angle AED$ 的度數？



解：

(方法一)



①∵平行四邊形的鄰角互補

∴ $\angle C+\angle D=180°$

$\angle D=180°-\angle C=180°-40°=140°$

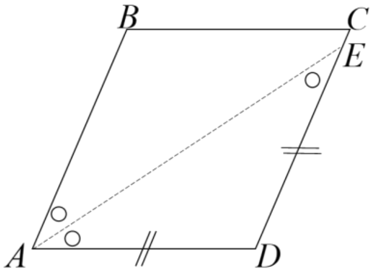
②∵ $\overline{AD}=\overline{DE}$

∴△ADE 為等腰三角形，兩底角相等

∴ $\angle AED=\angle DAE$

∴ $\angle AED=(180°-140°)\div 2=40°\div 2=20°$

(方法二)



①∵平行四邊形的對角相等

$\angle BAD=\angle C=40°$

②∵ $\overline{AD}=\overline{DE}$

∴△ADE 為等腰三角形，兩底角相等

∴ $\angle AED=\angle DAE$

③∵平行四邊形的對邊平行

∴ $\overline{AB}//\overline{CD}$ 　∴ $\angle BAE=\angle AED$ (內錯角相等)

④∴ $\angle AED=\angle DAE=\angle BAE=\angle BAD\div 2=40°\div 2=20°$

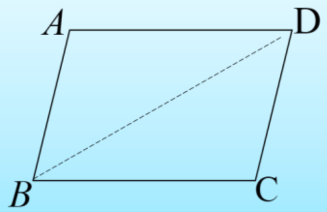
答：$\angle AED=20°$

隨堂練習

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，

$\angle A=100°$，若 $\angle ABD$：$\angle DBC=3$：2，

則 $\angle DBC$ 的度數為何？



活動二：對角線互相平分

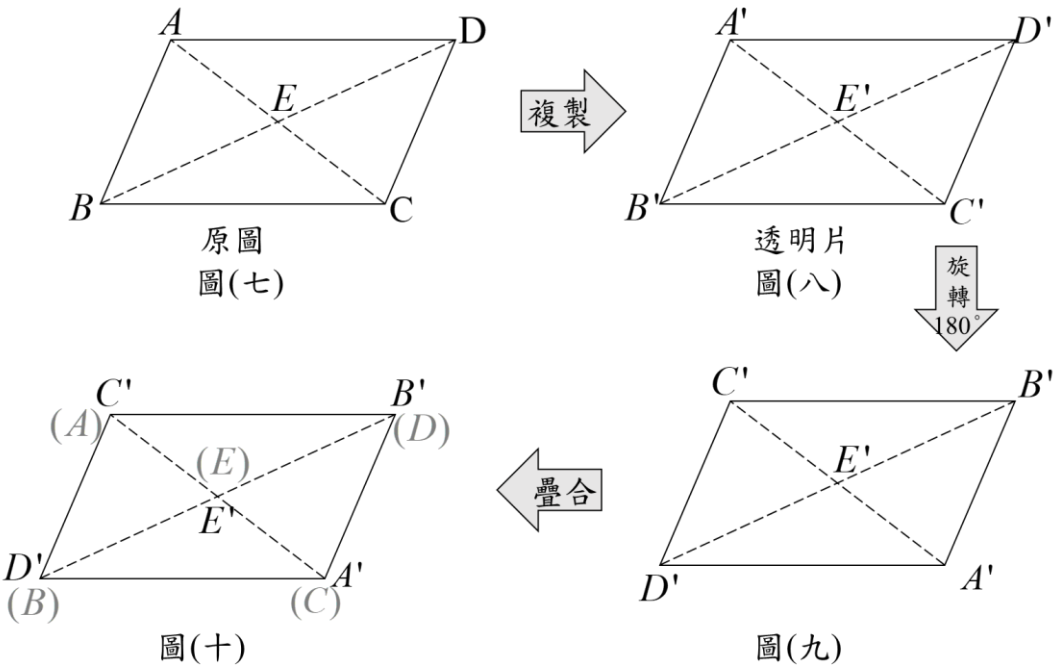
下圖(七)是一個平行四邊形$\square ABCD$，且對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點。

用透明片複製一樣的圖形，並將對應點分別標示 $A'B'C'D'E'$，如圖(八)。

將透明片旋轉 180°，如圖(九)。將投影片移動且疊放在圖七上方，如圖(十)。

使得 E'和 E、A'和 C 、B'和 D 、C'和 A、D'和 B 疊在一起。

請問你有什麼發現?



①觀察圖十， 發現$\overline{E'A'}$與$\overline{EC}$疊合，$\overline{E'A'}$是從$\overline{EA}$複製過來的，

所以$\overline{EA}=\overline{EC}$ 。

②也發現$\overline{E'B'}$與$\overline{ED}$疊合，$\overline{E'B'}$是從$\overline{EB}$複製過來的，

所以$\overline{EB}=\overline{ED}$ 。

同理可知$\overline{EA}=\overline{EC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ 、 $\overline{EB}=\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ 。

也就是兩條對角線的交點 E 會將對角線都平分成等長的兩段，

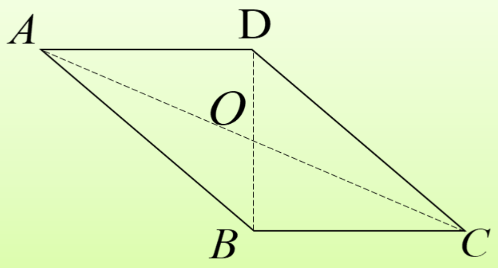
我們稱為「平行四邊形的對角線互相平分」。

(9) 如圖，平行四邊形▱$ABCD$中，

$\overline{AC}$和$\overline{BD}$交於O點，

已知$\overline{AB}$=16，$\overline{AD}$=18，$\overline{BD}$=22，

請問$\overline{CD}$、$\overline{BC}$、$\overline{OB}$、$\overline{OD}$分別為何?



解:

我先想像複製圖形，再旋轉 180 度後疊上去，並標示長度。如圖。

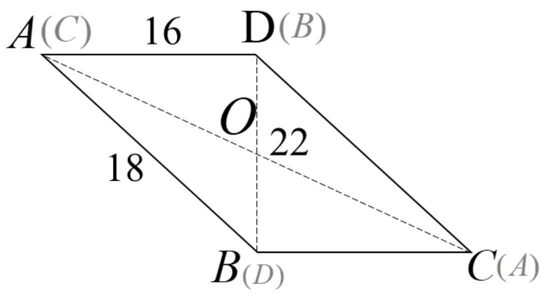
（方法一）

①對準 O 點，得到 A 點與 C 點疊合，B 點與 D 點疊合，

C 點與 A 點疊合，D 點與 B 點疊合，

發現$\overline{BC}$與$\overline{AD}$疊合，$\overline{AB}$與$\overline{CD}$疊合，

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$=18，$\overline{AB}=\overline{CD}$=20。



②對準 O 為對角線交點，

發現$\overline{OB}$與$\overline{OD}$疊合

$\therefore \overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$=22÷2=11

（方法二）

①$\because$平行四邊形 $ABCD$ 的對邊等長，

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$=7，$\overline{AB}=\overline{CD}$=11。

②$\because$平行四邊形 $ABCD$ 的對角線互相平分，O 為對角線交點，

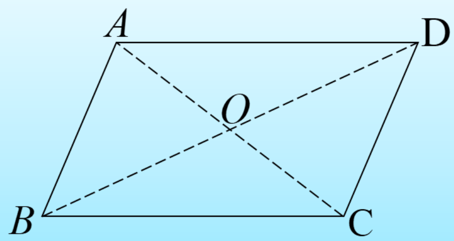
$\therefore \overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$=13÷2=6.5

答: $\overline{CD}$=11、$\overline{BC}$=7、$\overline{OB}$=6.5、$\overline{OD}$=6.5

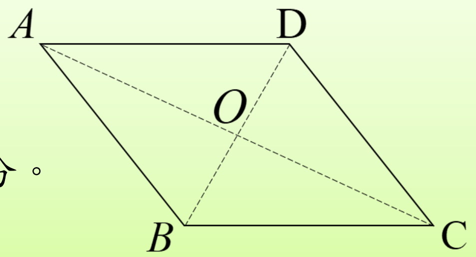
隨堂練習

▱$ABCD$ 為平行四邊形，$\overline{BD}=18$，$\overline{AC}=16$，

請問$\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\overline{CO}$、$\overline{DO}$分別為何?



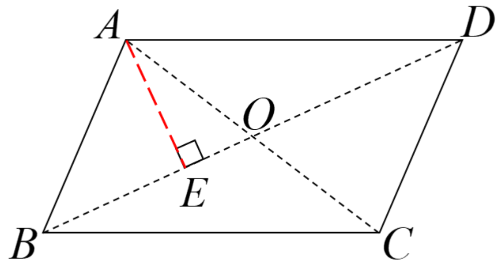
(10) 如圖，平行四邊形▱$ABCD$中，
對角線$\overline{AB}$和$\overline{BD}$相交於O點，
試說明兩條對角線將平行四邊形面積四等分。



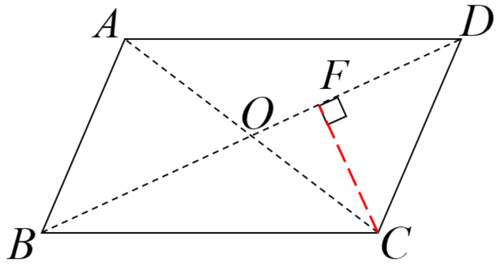
說明:

①▱$ABCD$ 為平行四邊形，所以$\triangle ABC \cong \triangle ACD$
表示$\triangle ABC$ 的面積=$\triangle ACD$ 的面積

②如圖，▱$ABCD$ 中，對角線$\overline{AB}$和$\overline{BD}$相交於 O 點。
過 A 作$\triangle AOB$ 與$\triangle AOD$ 的高$\overline{AE}$，
$\because \triangle AOB$ 的面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{BO}$
$\triangle AOD$ 的面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{DO}$
$\because$ ▱$ABCD$ 對角線互相平分，$\overline{BO}=\overline{DO}$
$\therefore \triangle AOB$ 的面積＝$\triangle AOD$ 的面積



③過 C 作$\triangle COB$ 與$\triangle COD$ 的高$\overline{CF}$，
$\because \triangle COB$ 的面積$=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{BO}$
$\triangle COD$ 的面積$=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{DO}$
$\because$ ▱$ABCD$ 對角線互相平分，$\overline{BO}=\overline{DO}$
$\therefore \triangle COB$ 的面積＝$\triangle COD$ 的面積



④$\because \triangle ABC$ 的面積=$\triangle ACD$ 的面積
$\triangle AOB$ 的面積+$\triangle COB$ 的面積=$\triangle AOD$ 的面積+$\triangle COD$ 的面積。
⑤我們發現$\triangle AOB$ 的面積＝$\triangle AOD$ 的面積=$\triangle BOC$ 的面積=$\triangle COD$ 的面積。

重點整理

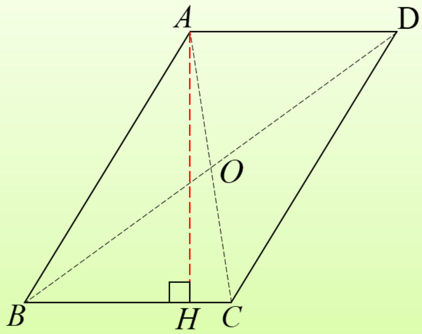
平行四邊形$ABCD$中，O為兩條對角線的交點，
則$\triangle AOB$的面積＝$\triangle AOD$的面積=$\triangle BOC$的面積=$\triangle COD$的面積
即 「兩條對角線將平行四邊形分割成四塊等面積的三角形」。

(11) 如圖，▱$ABCD$中，$\overline{BC}=10$，

其對應的高$\overline{DH}=16$，

其對角線$\overline{AB}$和$\overline{BD}$相交於O點，

請問△BOC的面積為何?



解：

$$▱ABCD\text{ 的面積}=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}$$
$$=\frac{1}{2}\times 10\times 16$$
$$=80\text{ (平方單位)}$$

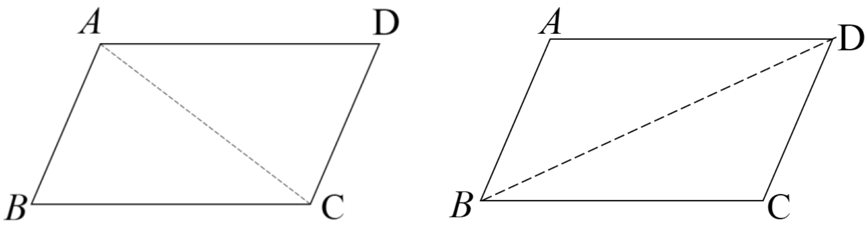
∵O 點為$\overline{AB}$和$\overline{BD}$兩條對角線的交點

$$\therefore \triangle BOC\text{ 的面積}=\frac{1}{4}\times ▱ABCD\text{ 的面積}$$
$$=\frac{1}{4}\times 80$$
$$=20\text{ (平方單位)}$$

答：20 (平方單位)

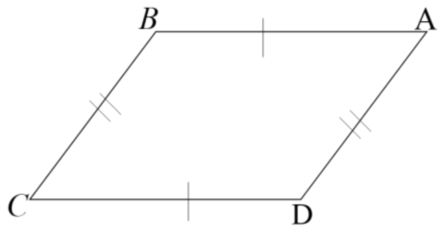
☆關於 平行四邊形 的性質

1. 平行四邊形的任一條對角線將平行四邊形分成兩個全等三角形。

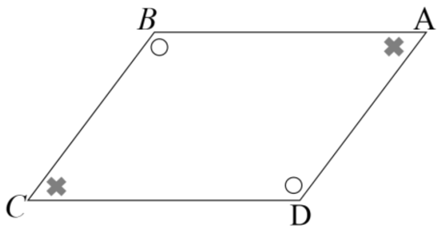


ΔABC與ΔACD全等 ， ΔABD與ΔABD全等

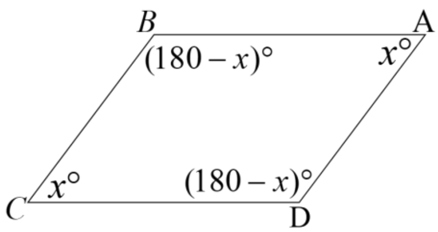
2. 平行四邊形的兩組對邊分別相等。（$\overline{AD}=\overline{BC}$ ，$\overline{AB}=\overline{CD}$）



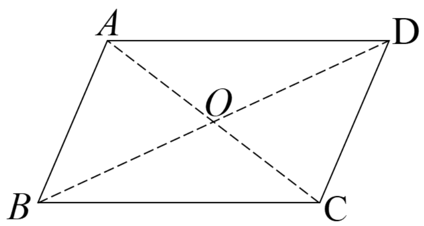
3. 平行四邊形的兩組對角分別相等。（$\angle A=\angle C$ ，$\angle B=\angle D$）



4. 平行四邊形的兩組鄰角互補。（$\angle A+\angle B=180°$，$\angle C+\angle B=180°$ ，
$\angle C+\angle D=180°$ ，$\angle C+\angle B=180°$ 。)

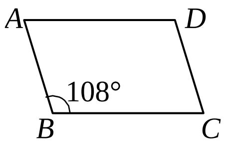


5. 對角線互相平分，即$\overline{OA}=\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$， $\overline{OA}=\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，且將平行四邊形面積四等分。

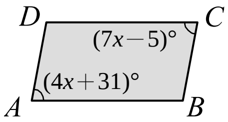


小試身手

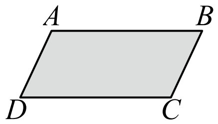
(1)如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle B=108°$，求其他三個內角的度數。



(2)如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=(4x+31)°$、$\angle C=(7x-5)°$，則 $\angle B=$？

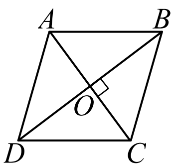


(3)如圖，已知平行四邊形 $ABCD$ 的周長為 24 公分，$\overline{CD}=2\overline{AD}$，則各邊的長度分別為多少公分？



(4)平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 比 $\overline{BC}$ 的 5 倍少 8 公分，$\overline{CD}$ 比 $\overline{AD}$ 的 2 倍多 4 公分，則平行四邊形 $ABCD$ 的周長為多少公分？

(5)如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AC}=18$，$\overline{BD}=24$，則：



①$\overline{AO}=$？

②$\overline{AB}=$？

③$\triangle AOB$ 的面積＝？

④平行四邊形 $ABCD$ 的面積＝？

教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學