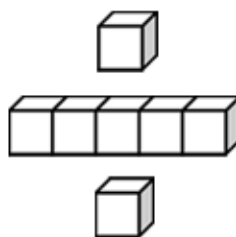


基本學習內容：AC-8-3-2

整係數多項式的乘法運算

班級：_____

姓名：_____





基本學習內容：AC-8-3-2

◎多項式的乘法運算

(1)請寫出下列各式的結果。

① $5+5+5$

② $x+x+x$

③ $5 \times 5 \times 5$

④ $x \cdot x \cdot x$

⑤ $2x^2 \times 5$

⑥ $2x^2 \times 5x^3$

解：

① $5+5+5=5 \times 3=15$

② $x+x+x=x \times 3=3x$

③ $5 \times 5 \times 5=5^3$

④ $x \cdot x \cdot x = x^1 \cdot x^1 \cdot x^1 = x^3$

⑤ $2x^2 \times 5$

$= 2 \cdot x^2 \cdot 5$

$= 2 \cdot 5 \cdot x^2$

$= 10x^2$

⑥ $2x^2 \times 5x^3$

$= 2 \cdot x^2 \cdot 5 \cdot x^3$

$= 2 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot 5$

$= 2 \cdot x^{2+3} \cdot 5$

$= 2 \cdot 5 \cdot x^5$

$= 10x^5$

我們作 $ax^m \times bx^n$ 運算時，可以先將兩項係數 a 、 b 相乘，再利用指數律將以 x 為底數的 m 、 n 次方相加，得到 $(ab)x^{m+n}$ 。

例如： $3x^5 \times 4x^6 = (3 \cdot 4)x^{5+6} = 12x^{11}$ 。

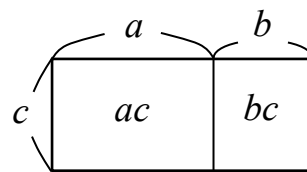
另外，作 $ax^m \times bx$ 運算時，其中 $bx = bx^1$ ，所以 $ax^m \times bx = (ab)x^{m+1}$ 。



(2) $2x+3$ 的 4 倍是多少？請用乘法算式記錄下來。

解：

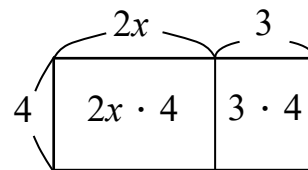
我們學過用長方形面積來說明乘法對加法分配律 $(a+b) \cdot c = ac + bc$ ，如圖一。



圖一

$2x+3$ 的 4 倍可以記為 $(2x+3) \cdot 4$ ，型式與 $(a+b) \cdot c$ 相同，

所以也可用面積來說明 $(2x+3) \cdot 4$ 的結果，令 $a=2x$ ， $b=3$ ， $c=4$ ，如圖二。



圖二



我們從圖二看到：可以用兩個較小的長方形拼接得到大長方形，表示大長方形的面積 $(2x+3) \cdot 4$ ，也等於兩個較小長方形面積和 $2x \cdot 4 + 3 \cdot 4$ ，所以 $(2x+3) \cdot 4 = 2x \cdot 4 + 3 \cdot 4$ 。



也可以用橫式記錄說明：

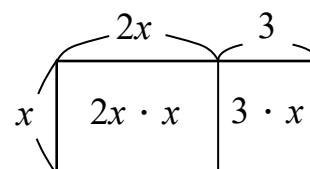
將 $(a+b) \cdot c = ac + bc$

改寫 $(2x+3) \cdot 4 = 2x \cdot 4 + 3 \cdot 4$
 $= 8x + 12$

(3) $2x+3$ 的 x 倍是多少？ $2x+3$ 的 $4x$ 倍是多少？
 請用乘法算式記錄下來。

解：

- ① $2x+3$ 的 x 倍可以記為 $(2x+3) \cdot x$ ，
 可以用面積來說明 $(2x+3) \cdot x$ 的結果，
 如圖一。



圖一

也可以用橫式記錄說明：

已知 $(a+b) \cdot c = ac + bc$

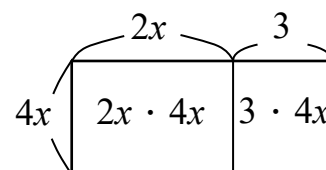
令 $a = 2x$ ， $b = 3$ ， $c = x$

改寫 $(2x+3) \cdot x = 2x \cdot x + 3 \cdot x$
 $= 2x^2 + 3x$

「 x 倍」、「 $4x$ 倍」中的 x 、 $4x$ 各代表一個數與 $2x+3$ 來進行乘法運算。



- ② $2x+3$ 的 $4x$ 倍可以記為 $(2x+3) \cdot 4x$ ，
 可以用面積來說明 $(2x+3) \cdot 4x$ 的結果，
 如圖二。



圖二

也可以用橫式記錄說明：

已知 $(a+b) \cdot c = ac + bc$

令 $a = 2x$ ， $b = 3$ ， $c = 4x$

改寫 $(2x+3) \cdot 4x = 2x \cdot 4x + 3 \cdot 4x$
 $= 8x^2 + 12x$



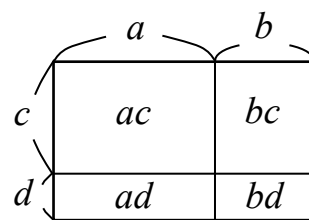
我們從圖一、圖二知道計算 $(mx+n) \cdot px$ 時，可以看成大長方形的面積 $(mx+n) \cdot px$ ，也等於兩個較小長方形面積和 $mx \cdot px + n \cdot px$ ，所以 $(mx+n) \cdot px = mx \cdot px + n \cdot px = mpx^2 + npx$ 。
例如： $(3x+4) \cdot 5x = 3x \cdot 5x + 4 \cdot 5x = 15x^2 + 20x$ 。

(4) 請計算 $(2x+3) \cdot (3x+4)$ 的結果。

解：

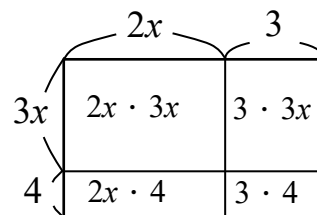
方法一、

我們學過用長方形面積來說明乘法對加法分配律 $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$ ，如圖一。



圖一

$(2x+3) \cdot (3x+4)$ ，型式與 $(a+b)(c+d)$ 相同，所以也可用面積來說明 $(2x+3) \cdot (3x+4)$ 的結果，令 $a=2x$ ， $b=3$ ， $c=3x$ ， $d=4$ ，如圖二。



圖二

也可以用橫式記錄說明：

將 $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

改寫 $(2x+3) \cdot (3x+4) = 2x \cdot 3x + 3 \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 4$
 $= 6x^2 + 9x + 8x + 12$
 $= 6x^2 + 17x + 12$

我們從圖二看到：可以用四個較小的長方形拼接得到大長方形，表示大長方形的面積 $(2x+3) \cdot (3x+4)$ ，也等於四個較小長方形面積和 $2x \cdot 3x + 3 \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 4$ ，所以 $(2x+3) \cdot (3x+4) = 2x \cdot 3x + 3 \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 4$ 。





我們從圖一、圖二知道計算 $(mx+n) \cdot (px+q)$ 時，可以看成大長方形的面積 $(mx+n) \cdot (px+q)$ ，也等於四個較小長方形面積和 $mx \cdot px + n \cdot px + mx \cdot q + n \cdot q$ ，所以

$$(mx+n) \cdot (px+q) = mx \cdot px + n \cdot px + mx \cdot q + n \cdot q$$

$$= (mp)x^2 + (np + mq)x + n \cdot q$$


例如：

$$(3x+4)(5x+6) = 3x \cdot 5x + 4 \cdot 5x + 3x \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 15x^2 + 38x + 24$$

方法二、

①

直式乘法：

$\begin{array}{ c c } \hline 2x & 3 \\ \hline 3x & 2x \cdot 3x & 3 \cdot 3x \\ \hline 4 & 2x \cdot 4 & 3 \cdot 4 \\ \hline \end{array}$ <p style="text-align: center;">圖二</p>	$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 2x \cdot 4 3 \cdot 4 \leftarrow (2x+3) \cdot 4 \\ 2x \cdot 3x 3 \cdot 3x \leftarrow (2x+3) \cdot 3x \\ \hline 6x^2 17x 12 \end{array}$
---	--

將直式乘法過程改寫成橫式記錄：

$$\begin{aligned} (2x+3) \cdot (3x+4) &= (2x+3) \cdot 3x + (2x+3) \cdot 4 \\ &= 6x^2 + 17x + 12 \end{aligned}$$

②

由乘法交換律知道 $(2x+3) \cdot (3x+4) = (3x+4)(2x+3)$ ，

$$\begin{aligned} (3x+4) \cdot (2x+3) &= (3x+4) \cdot 2x + (3x+4) \cdot 3 \\ &= 6x^2 + 17x + 12 \end{aligned}$$

由①、②知道：

$$(2x+3) \cdot (3x+4) = (3x+4) \cdot (2x+3)$$

表示 $(2x+3) \cdot 3x + (2x+3) \cdot 4 = (3x+4) \cdot 2x + (3x+4) \cdot 3$

$$= 2x \cdot (3x+4) + 3 \cdot (3x+4)$$



我們從上面知道：

$$(2x+3)(3x+4) = (2x+3) \cdot 3x + (2x+3) \cdot 4 ;$$

$(2x+3)(3x+4) = 2x \cdot (3x+4) + 3 \cdot (3x+4)$ ，這樣乘開過程，我們稱之為乘法對加法的分配律；

所以

$$(2x+3) \cdot (3x+4) = (2x+3) \cdot 3x + (2x+3) \cdot 4 = 2x \cdot (3x+4) + 3 \cdot (3x+4)。$$



(5) 請計算 $(2x^2 + 3x + 4)(5x + 6)$ 的結果。

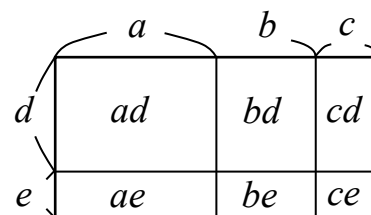
解：

方法一、

我們學過用長方形面積來說明乘法對加法分配律

$$(a+b+c)(d+e) = ad + bd + cd + ae + be + ce，$$

如圖一。



圖一

$(2x^2 + 3x + 4)(5x + 6)$ 的型式

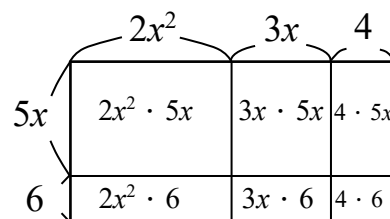
與 $(a+b+c)(d+e)$ 相同，

所以也可用面積來說明 $(2x^2 + 3x + 4)(5x + 6)$

的結果，

令 $a = 2x^2$ ， $b = 3x$ ， $c = 4$ ， $d = 5x$ ， $e = 6$ ，

如圖二。



圖二

也可以用橫式記錄說明：

$$\text{將 } (a+b+c)(d+e) = ad + bd + cd + ae + be + ce$$

改寫

$$\begin{aligned} (2x^2 + 3x + 4) \cdot (5x + 6) &= 2x^2 \cdot 5x + 3x \cdot 5x + 4 \cdot 5x + 2x^2 \cdot 6 + 3x \cdot 6 + 4 \cdot 6 \\ &= 10x^3 + 15x^2 + 20x + 12x^2 + 18x + 24 \\ &= 10x^3 + 27x^2 + 38x + 24 \end{aligned}$$



方法二、

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 2x^2 \quad + 3x \quad + 4 \\ \times \qquad \qquad \qquad 5x \quad + 6 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r} 2x^2 \cdot 6 \quad + 3x \cdot 6 \quad + 4 \cdot 6 \\ 2x^2 \cdot 5x \quad + 3x \cdot 5x \quad + 4 \cdot 5x \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r} 10x^3 \quad + 27x^2 \quad + 38x \quad + 24 \end{array}
 \end{array}$$

(6) 請用直式乘法計算 $(2x^2 + 4)(5x + 6)$ 。

解：

多項式 $2x^2 + 4$ 缺了 x 項， x 項項數為 0，
表示 $2x^2 + 4 = 2x^2 + 0x + 4$ ，也可以寫成 $2x^2 + 0 + 4$ ，

接著，以直式乘法計算 $(2x^2 + 0 + 4)(5x + 6)$ ：

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 2x^2 \quad + 0 \quad + 4 \\ \times \qquad \qquad \qquad 5x \quad + 6 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r} 2x^2 \cdot 6 \quad + 0 \cdot 6 \quad + 4 \cdot 6 \\ 2x^2 \cdot 5x \quad + 0 \cdot 5x \quad + 4 \cdot 5x \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r} 10x^3 \quad + 12x^2 \quad + 20x \quad + 24 \end{array}
 \end{array}$$

所以 $(2x^2 + 4)(5x + 6) = 10x^3 + 12x^2 + 20x + 24$

我們作多項式有缺項的乘法運算 $(2x^2 + 4) \cdot (5x + 6)$ 時，將缺的 x 項補 0，得到 $(2x^2 + 0 + 4) \cdot (5x + 6)$ ，再進行多項式直式乘法運算。



隨堂練習

(1) 計算下列各式：

- ① $(x^2 + 2x + 3)(3x + 4)$
- ② $(7x^2 + 6)(2x + 3)$



(7) ① 請計算 $-(2x^2 + 3x - 4)$ 的結果。

② $-(2x^2 + 3x - 4)$ 的結果與 $(-2)x^2 + (-3)x + [-(-4)]$ 的結果相等嗎？

解：

① $-(2x^2 + 3x - 4)$ 可記為 $(-1)(2x^2 + 3x - 4)$ ，

$$\begin{aligned} (-1)(2x^2 + 3x - 4) &= (-1) \cdot 2x^2 + (-1) \cdot 3x + (-1) \cdot (-4) \\ &= -2x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

② 因為 $-(2x^2 + 3x - 4) = -2x^2 - 3x + 4$

$$(-2)x^2 + (-3)x + [-(-4)] = -2x^2 - 3x + 4$$

所以 $-(2x^2 + 3x - 4)$ 的結果與 $(-2)x^2 + (-3)x + [-(-4)]$ 的結果相等。

因為

$$-(ax^2 + bx + c) = (-a)x^2 + (-b)x + (-c)，$$

$$(-1) \cdot (ax^2 + bx + c) = (-a)x^2 + (-b)x + (-c)，$$

所以 $-(ax^2 + bx + c) = (-1) \cdot (ax^2 + bx + c)$ ，也表示 $-(ax^2 + bx + c)$ 的各項係數剛好是 a 、 b 、 c 的相反數，分別為 $(-a)$ 、 $(-b)$ 、 $(-c)$ 。



(8) ① 請計算 $-2(3x^2 - 5x + 1)$ 的結果。

② 請計算 $-2x(3x^2 - 5x + 1)$ 的結果。

解：

$$\begin{aligned} ① -2(3x^2 - 5x + 1) &= 2(-3x^2 + 5x - 1) \\ &= -6x^2 + 10x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② -2x(-4x^2 + 3x - 2) &= 2x(4x^2 - 3x + 2) \\ &= 8x^3 - 6x^2 + 4x \end{aligned}$$



(9) 請計算 $(x^2 - x - 5)(3x - 2)$ 。

解：

方法一、利用「加法」連結各項，再作兩多項式乘法運算：

$$\begin{aligned}
 & (x^2 - x - 5)(3x - 2) \\
 &= [1x^2 + (-1)x + (-5)][3x + (-2)] \\
 &= (1 \cdot 3)x^3 + [(-1) \cdot 3]x^2 + (-5) \cdot 3x \\
 &\quad + [1 \cdot (-2)]x^2 + [(-1) \cdot (-2)]x + (-5) \cdot (-2) \\
 &= 3x^3 + [(-3) + (-2)]x^2 + [(-15) + 2]x + 10 \\
 &= 3x^3 - 5x^2 - 13x + 10
 \end{aligned}$$

方法二、將兩式各項係數利用乘法對加法的分配律作兩多項式乘法運算：

$$\begin{aligned}
 & (x^2 - x - 5)(3x - 2) \\
 &= (x^2 - x - 5) \cdot 3x + (x^2 - x - 5)(-2) \\
 &= 3x^3 - 3x^2 - 15x - 2x^2 + 2x + 10 \\
 &= 3x^3 - 5x^2 - 13x + 10
 \end{aligned}$$

(10) 請計算下列各式：

- ① $(2x + 3)^2$
- ② $(3x - 4)^2$

解：

①方法一、利用乘法公式計算：

$$\begin{aligned}
 (2x + 3)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 \\
 &= 4x^2 + 12x + 9
 \end{aligned}$$

方法二、

$$\begin{aligned}
 (2x + 3)^2 &= (2x + 3)(2x + 3) \\
 &= 2x \cdot 2x + 3 \cdot 2x + 2x \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\
 &= 4x^2 + 12x + 9
 \end{aligned}$$



②方法一、利用乘法公式計算：

$$\begin{aligned}(3x-4)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

方法二、

$$\begin{aligned}(3x-4)^2 &= (3x-4)(3x-4) \\ &= 3x \cdot 3x - 4 \cdot 3x + 3x \cdot (-4) + (-4) \cdot (-4) \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

$(2x+3)^2$ 改記成 $(2x+3)(2x+3)$ ，

$(3x-4)^2$ 改記成 $(3x-4)(3x-4)$ 來計算，

表示利用乘法公式作計算，也可以直接透過多項式乘法運算得到。



多項式算式型如： $(ax \pm b)^2$ ，可以利用乘法公式作計算，也可以直接透過多項式乘法運算得到。



隨堂練習

(1) 計算下列各式：

① $-3x(2x+6)$

② $(x^2 - 5x + 3)(x - 4)$

③ $(3x+4)(-3+x^2)$

④ $(3x-1)^2$



小試身手

請計算下列各式：

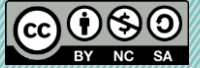
(1) $(2x+3)(4x+1)$

(2) $(x^2+3x-4)(2x-1)$

(3) $(4x^2+7)(x-3)$

(4) $(7x-1)^2$

(5) $(3x+5)^2$



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

8 年級數學

