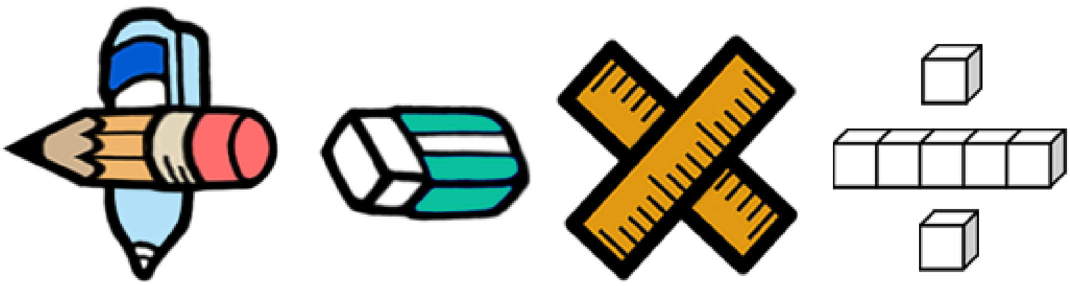
基本學習內容：SC-9-6-1

圓心角的度數等於所對弧的度數

【教師用】



教育部國民及學前教育署 編

中華民國 112 年 8 月

學習內容：

S-9-6 圓的幾何性質：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；
圓內接四邊形對角互補；切線段等長。

基本學習內容：

SC-9-6-1 圓心角的度數等於所對弧的度數。

基本學習表現：

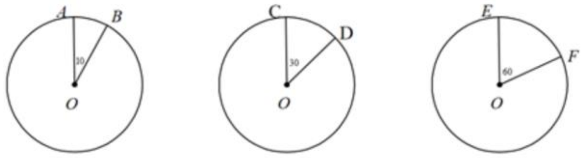
SCP-9-6-1-1 認識圓心角的度數等於所對弧的度數。

概要說明：

■ 基本學習內容 SC-9-6-1 為 SC-6-3-2 的後續學習概念，故學生應已認識扇形的「圓心角：360＝ 扇形弧長：圓周長」。

■ 本基本學習內容不介紹弦切角、圓內角、圓外角及圓冪性質。

■ 圓心角的度量方式有兩種：度度量和弧度量。如下三個圖，圓半徑均為 1 單位長。



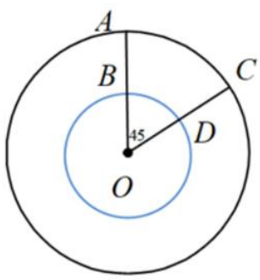
左圖圓心角張開 10 度，AB 的弧長= $2\times\pi\times\dfrac{10}{360}=\dfrac{1}{18}\pi$；

中圖圓心角張開 30 度，CD 的弧長=$2\times\pi\times\dfrac{30}{360}=\dfrac{1}{6}\pi$；

右圖圓心角張開 60 度，EF 的弧長=$2\times\pi\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{1}{3}\pi$ 。

我們可以發現，三個圖的圓心角度數比為 $10:30:60=1:3:6$。因此， AB 的弧長：CD 的弧長：EF 的弧長 = $\dfrac{1}{18}\pi:\dfrac{1}{6}\pi:\dfrac{1}{3}\pi$ $=1:3:6$ 可說明圓心角張開度數比會等於弧長張開程度比。所以，我們可以用弧長來代表圓心角的角度(弧度量)，例如：$\angle\mathrm{AOB}=AB$ ，也可以說 $AB=30^\circ$ 。

■ 有不等長半徑的兩同心圓，不同的弧長會對應到相同的弧度。如下圖，因周長會受半徑大小影響，故我們可以發現 AC 的弧長會大於 BD 的弧長。以小圓來說 BD 弧長佔了整小圓周長的 $\dfrac{45}{360}$，以大圓來說 AC 弧長佔了整大圓周長的 $\dfrac{45}{360}$，得知其所佔其圓的比例不變，因此我們可以發現，不等長半徑的同心圓圓心角度數一樣時，其所對的弧長會不相等。相反的，AC 弧度佔整圓的 $\dfrac{1}{8}$ ，BD 弧度佔整圓的 $\dfrac{1}{8}$ ，我們可以發現在此 AC 弧長大於 BD 弧長，但 AC 弧度＝BD 弧度。



複習「弧」、「扇形」、「圓心角」和「切線性質」

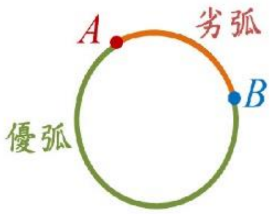
「弧」

在圓 O 上任意取兩個點 A、B，把圓分成兩個部份，這兩個部份都稱為弧。

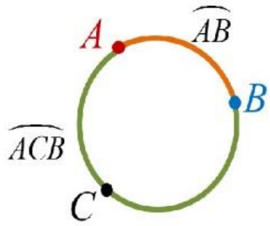
如圖一，如果兩個弧大小不一樣，較大的弧稱為優弧、較小的弧稱為劣弧。

如圖二，我們稱弧 AB 時指的是劣弧，記為 $\overset{\frown}{AB}$ 或 $\overset{\frown}{BA}$，

要表示優弧時，會在優弧上再取一點 C，將優弧記為 $\overset{\frown}{ACB}$ 或 $\overset{\frown}{BCA}$。



圖一



圖二

「扇形」

由圓心 O 和兩條半徑以及所對的弧所形成的圖形稱為扇形，

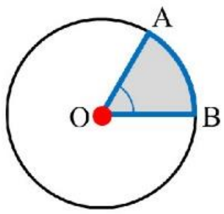
如圖三～圖五的灰色區域，都稱為扇形。

「圓心角」

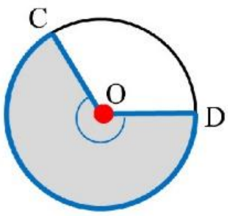
在扇形中，兩條半徑所夾的角稱為圓心角，

如圖三的 $\angle AOB$ 、圖四的 $\angle COD$ 和圖五的 $\angle EOF$ 都是圓心角。

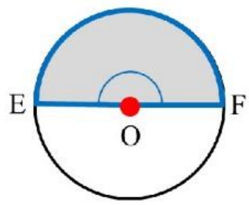
因為周角＝360°，二分之一圓的圓心角為 180°，所以 $\angle EOF = 180°$ 。



圖三



圖四



圖五

教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點在複習本單元會使用到的圓相關的名詞與定義。
2. 本頁說明「弧」、「扇形」、「圓心角」的定義。

弧：在圓上任意取兩點，此兩點將圓分成兩個部份，這兩個部份都稱為弧。

扇形：由圓心和兩條半徑以及所對的弧所形成的圖形稱為扇形。

圓心角：在扇形中，兩條半徑所夾的角稱為圓心角。

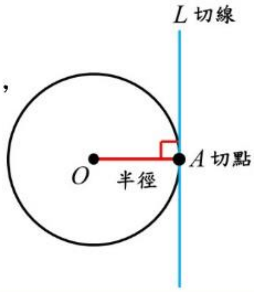
「切線性質」

若直線L與圓O只交於一點A，則L稱為圓O的切線，

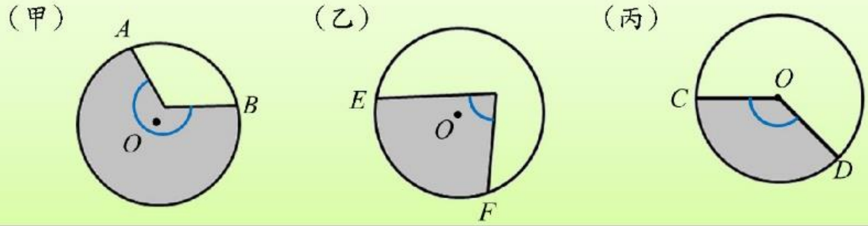
A點稱為切點。此時，

(1) 圓O到L的距離等於圓的半徑長。

(2) $L \perp \overline{OA}$。



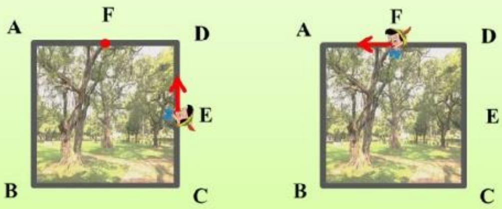
(1) 說說看，哪一個是圓 O 的圓心角？



解：

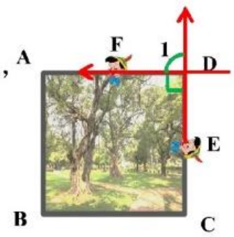
小光說：圖(甲)和圖(乙)的灰色區域不是扇形，所以夾角一定不是圓心角。
圖(丙)的灰色區域是扇形，所以$\angle COD$是圓心角。

(2) 下圖為正方形公園 ABCD。
E 點為$\overline{CD}$中點，F 點為$\overline{AD}$中點，皮諾丘沿著灰色步道健走，
從 E 點出發，經過 D 點走到 F 點，請問皮諾丘轉了幾度?



解：

芳容說：我把起點的方向當作始邊，終點的方向當作終邊，
延長始邊與終邊交在 D 點。
$\angle 1$就是皮諾丘旋轉的角度，因為正方形的內角
為 90 度，所以皮諾丘就轉了 90 度。



教材內容說明：

1. 本教材第 1~2 頁的教學重點在複習本單元會使用到的圓相關的名詞與定義。
2. 本頁上半部說明「切線」的定義。

   (1)若直線與圓只交於一個點，則直線稱為該圓的切線，交點稱為切點。

   (2)圓心到切線的距離等於圓的半徑長。

   (3)圓心到切點的連線會與切線垂直。
3. 第(1)題給定甲、乙、丙三個圖，要求學生判斷哪一個是圓 O 的圓心角？

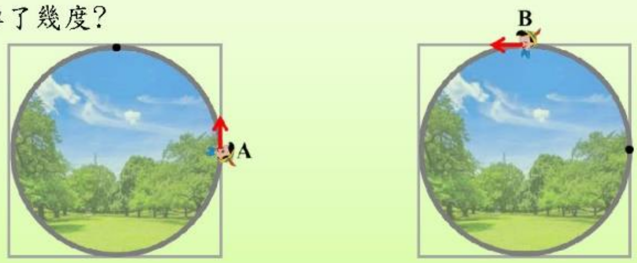
   教師引導學生說出圓心角的定義：扇形中兩半徑所夾的角就稱為圓心角。

   學生知道要先確認扇形，找到扇形，就可以找到圓心角。
4. 第(2)題給定正方形公園，皮諾丘沿著正方形周圍(灰色步道)健走，要求學生回答皮諾丘從 E 點出發，經過 D 點走到 F 點轉了幾度。

   教師引導學生將起點的方向當作始邊、終點的方向當作終邊，延長始邊與終邊的直線，找到交點，兩條直線的夾角就是轉彎的角度。

   ● 本題引入始邊與終邊的概念，為後續介紹圓心角與弧的度數作準備。

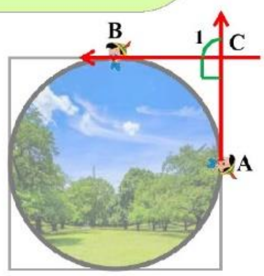
(3) 如圖，<u>皮諾丘</u>在公園裡的圓形步道健走，從 A 點走到 B 點，請問<u>皮諾丘</u>轉了幾度？



解：

<u>小義</u>說：我把起點的方向當作始邊，終點的方向當作終邊，延長始邊與終邊交在 C 點。

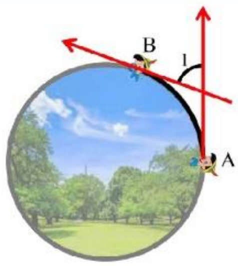
$\angle 1$就是皮諾丘旋轉的角度，因為正方形的內角為 90 度，所以皮諾丘就轉了 90 度。

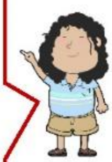


弧度的意義

(1) 沿著圓弧從一端走到另一端所轉的角度就稱為圓弧的度數，也稱為弧度。

(2) $\overset{\frown}{AB} = \angle 1$。





教材內容說明：

1. 本教材第 2~7 頁的教學重點是幫助學生理解圓心角與弧度的關係。
2. 第(3)題給定圓形步道，要求學生回答皮諾丘從 A 點走到 B 點轉了幾度。

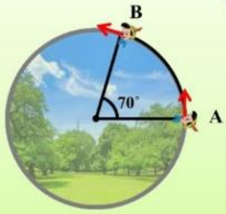
   本教材提供解法如下：

   教師引導學生將起點方向當作始邊、終點方向當作終邊，延長始邊與終邊的直線交於 C 點。

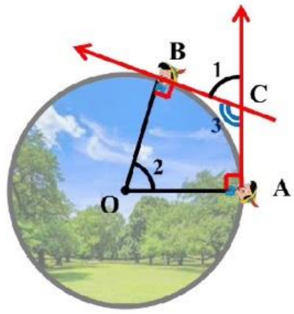
   觀察始邊與終邊的兩條直線的夾角，即為皮諾丘轉彎的角度。

   ● 本題延續第(2)題的解題概念，以圓形步道呈現題目，為引入弧度的意義奠定基礎。
3. 本頁下方教師提示重點在說明弧度的意義。

(4) 如圖，皮諾丘從A點走到B點，已知扇形的圓心角為70度，請問皮諾丘轉了幾度?



解：



如右圖，起點方向為始邊，終點方向為終邊，

所以從始邊轉到終邊就是∠1。

∠3是∠1的補角，

所以 $\angle 1+\angle 3=180^\circ$ ⋯(1)

四邊形 OACB 中，∠A 和 ∠B都是直角，

而且四邊形內角和是 360 度，

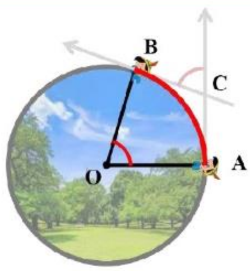
所以 $\angle 2+\angle 3=180^\circ$ ⋯(2)

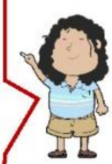
因此從第(1)式和第(2)式可以得到 $\angle 1=\angle 2=70^\circ$。

弧度與圓心角的關係

扇形圓弧的度數等於其圓心角的度數，

也就是 $\overset{\frown}{AB}=\angle AOB$。





教材內容說明：

1. 本教材第 2~7 頁的教學重點是幫助學生理解圓心角與弧度的關係。
2. 第(4)題給定扇形的圓心角為 70 度的圓形步道，要求學生回答皮諾丘從 A 點走到 B 點轉了幾度。

   本教材提供解法步驟如下：

   (1)將起點方向當作始邊、終點方向當作終邊，延長始邊與終邊的直線，

   找到交點 C，夾角為 $\angle 1$，$\angle 1$ 就是轉彎的角度。

   (2)如何找到 $\angle 1$？從四邊形 OACB 的內角和及外角知道：

   ①因為 $\angle 3$ 是 $\angle 1$ 的補角，所以 $\angle 1+\angle 3=180°$。

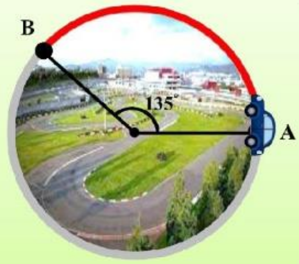
   ②因為四邊形內角和為 $360°$，又 $\angle A+\angle B=180°$，所以 $\angle 2+\angle 3=180°$。

   ③因為 $\angle 1+\angle 3=180°$ 且 $\angle 2+\angle 3=180°$，推得 $\angle 1=\angle 2$。

   (3)所以 $\angle 1=\angle 2=70°$。

   ● 本題在引出弧度與圓心角的關係。
3. 本頁下方教師提示重點在說明扇形圓弧的度數等於其圓心角的度數。

(5) 如右圖，一台車子沿著圓形跑道從A點開到B點，請問 AB 為多少度?



解：

方法一：如右圖，起點方向為始邊，終點方向為終邊，

所以從始邊轉到終邊就是$\angle 1$。

$\angle 3$是$\angle 1$的補角，

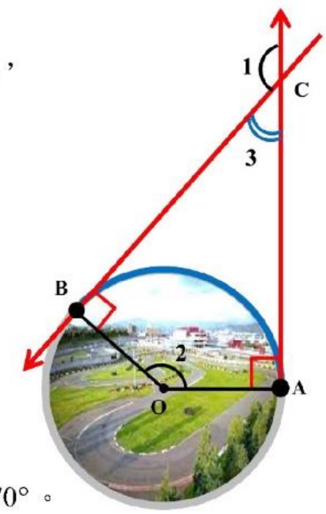
所以 $\angle 1+\angle 3=180^\circ \cdots(1)$

四邊形 OACB 中，$\angle$A 和$\angle$B都是直角，

而且四邊形內角和是 360 度，

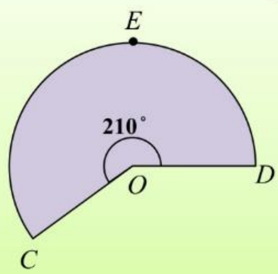
所以 $\angle 2+\angle 3=180^\circ \cdots(2)$

因此從第(1)式和第(2)式可以得到 $\angle 1=\angle 2=70^\circ$。



方法二：因為 AB 的圓心角是 135 度，所以 $AB=135$ 度。

(6) 如右圖，已知扇形的圓心角＝210度，求CED 的度數為多少？



解：

丁丁說：因為扇形的圓心角為210度，所以$CED=210$度。

教材內容說明：

1. 本教材第 2~7 頁的教學重點是幫助學生理解圓心角與弧度的關係。
2. 第(5)題給定扇形的圓心角為 135 度的圓形步道，要求學生回答車子從 A 點開到 B 點轉了幾度。

   本教材提供 2 種解法：

   解法一：

   (1)將起點方向當作始邊、終點方向當作終邊，延長始邊與終邊的直線，

   找到交點 C，夾角為 $\angle 1$，$\angle 1$ 就是轉彎的角度。

   (2)如何找到 $\angle 1$？從四邊形 OACB 的內角和及外角知道：

   ①因為 $\angle 3$ 是 $\angle 1$ 的補角，所以 $\angle 1 + \angle 3 = 180°$。

   ②因為四邊形內角和為 $360°$，又 $\angle A + \angle B = 180°$，所以 $\angle 2 + \angle 3 = 180°$。

   ③因為 $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ 且 $\angle 2 + \angle 3 = 180°$，推得 $\angle 1 = \angle 2$。

   (3) 所以 $\angle 1 = \angle 2 = 135°$。

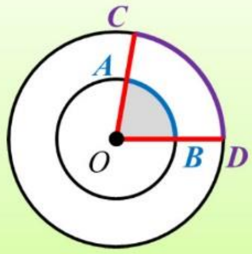
   解法二：

   直接利用前一頁的結論：扇形圓弧的度數等於其圓心角的度數，求得 $\overset{\frown}{CED} = 135°$

   ● 本題在讓學生熟悉扇形圓弧的度數等於其圓心角的度數。
3. 第(6)題給定扇形的圓心角為 210 度，要求學生回答 $\overset{\frown}{CED}$ 的度數。

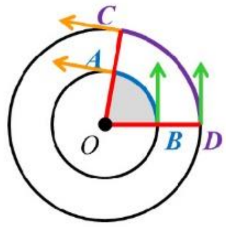
   教師引導學生利用「扇形圓弧的度數等於其圓心角的度數」解題，得到 $\overset{\frown}{CED} = 210°$

(7) 右圖有大小兩個圓，圓心都是O點，$\overline{OC}$、$\overline{OD}$是半徑，則AB、CD的度數會相等嗎?

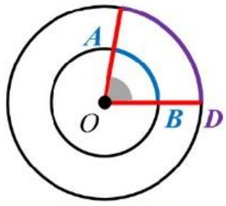


解：

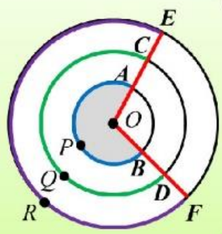
方法一：如右圖，因為AB、CD的始邊和終邊的方向都一樣，所以旋轉的角度也相等，則AB和CD的度數會相等。



方法二：如右圖，因為AB、CD所在的圓其圓心都是O點，所以AB、CD所對的圓心角都是$\angle AOB$，因此$AB = \angle AOB = CD$。



(8) 右圖有大中小三個圓，圓心都是O點，$\overline{OE}$、$\overline{OF}$是半徑，則APB、CQD、ERF的度數會相等嗎?



解：

詠盛說：我發現APB、CQD、ERF所對的圓心角都相等，所以APB、CQD、ERF的度數會相等。

半徑不同的弧，如果對應的圓心角相等，則弧的度數也會相等。

教材內容說明：

1. 本教材第 2~7 頁的教學重點是幫助學生理解圓心角與弧度的關係。
2. 第(7)題給定圓心相同的大小兩個圓，要求學生判斷 AB 、 CD 的度數是否相等。

   本教材提供 2 種解法：

   解法一：從始邊和終邊的方向來看。

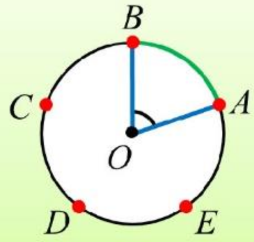
   因為 AB 、 CD 的始邊和終邊的方向都一樣，所以旋轉的角度也相等，

   則 AB 和 CD 的度數會相等。

   解法二：利用「扇形圓弧的度數等於其圓心角的度數」。

   因為 AB 和 CD 的圓心角都是 $\angle AOB$ ，所以 $AB = \angle AOB = CD$ 。
3. 第(8)題給定圓心相同的大中小三個圓，要求學生判斷 APB、CQD 和 ERF 的度數是否相等。教師引導學生從前一題的結論來思考，因為 APB 、 CQD 和 ERF 的所對的圓心角都相等，所以 APB 、 CQD 和 ERF 的度數也會相等。
4. 本頁下方教師提示重點在說明「半徑不同的弧，如果對應的圓心角相等，則弧的度數也會相等」。

(9) 如右圖，將圓O五等分，等分點為A、B、C、D、E，
則AB的度數為多少?



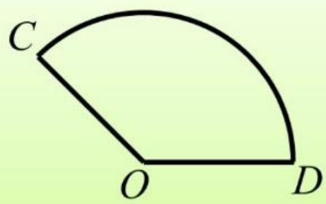
解：

小芸說：將圓五等分後，圓心角的度數就是周角的$\frac{1}{5}$，

所以$AB=\angle AOB=360^\circ\times\frac{1}{5}=72^\circ$

$\frac{n}{m}$圓的弧度$=360^\circ\times\frac{n}{m}$

(10) 右圖是$\frac{3}{8}$圓，請問CD的度數為多少度?



解：

欣欣說：因為$\frac{n}{m}$圓的弧度$=360^\circ\times\frac{n}{m}$

所以$CD=360^\circ\times\frac{3}{8}=135^\circ$。

教材內容說明：

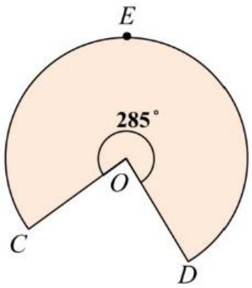
1. 本教材第 2~7 頁的教學重點是幫助學生理解圓心角與弧度的關係。
2. 第(9)題給定有五個等分點的圓，要求學生算出 AB 的度數。
   教師引導學生從「扇形圓弧的度數等於其圓心角的度數」解題，因為五等分圓，
   所以圓心角的度數就是周角的 $\frac{1}{5}$ ，
   故 $AB = \angle AOB = 360° \times \frac{1}{5} = 72°$
   - 本題在引出 $\frac{n}{m}$ 圓的弧度計算公式。
3. 本頁中間教師提示重點在說明 $\frac{n}{m}$ 圓的弧度＝$360° \times \frac{n}{m}$ 。
4. 第(10)題給定 $\frac{3}{8}$ 圓，要求學生算出 CD 的度數。
   教師引導學生由「$\frac{n}{m}$ 圓的弧度＝$360° \times \frac{n}{m}$」解題，將代入 $\frac{3}{8}$ 計算，
   所以 $CD = 360° \times \frac{3}{8} = 135°$ 。

小試身手

(1) 如右圖，小翊在圓形操場跑步，從A點出發，在B點遇到朋友停下來聊天，請問小翊轉了幾度?

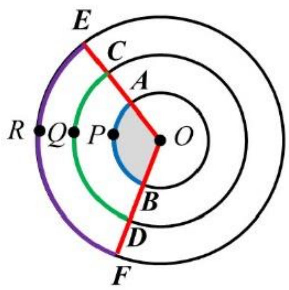
答：155度

(2) 如右圖，已知扇形的圓心角＝285度，求$\overset{\frown}{CED}$的度數為多少？



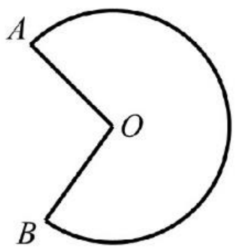
答：285度

(3) 右圖有大中小三個圓，圓心都是O點，$\overline{OE}$、$\overline{OF}$是半徑，請寫出$\overset{\frown}{APB}$、$\overset{\frown}{CQD}$、$\overset{\frown}{ERF}$的大小關係。



答：$\overset{\frown}{APB}=\overset{\frown}{CQD}=\overset{\frown}{ERF}$

(4) 右圖是$\frac{11}{15}$圓，請問$\overset{\frown}{AB}$的度數為多少度?



答：264度

教材內容說明：

1. 本教材第 8 頁小試身手提供本基本學習內容題目練習。

教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材 9 年級數學