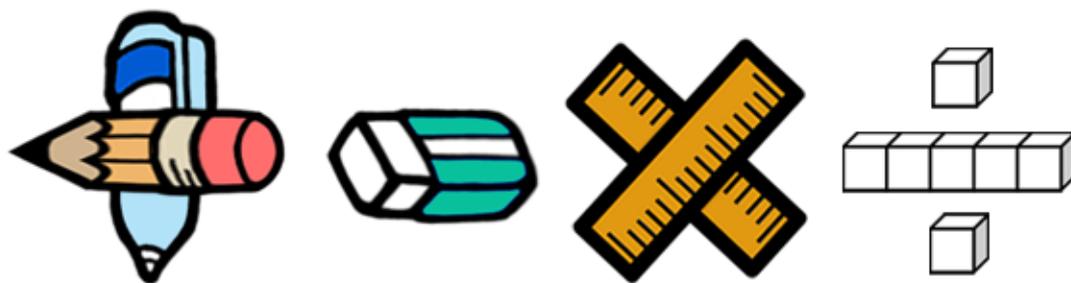




基本學習內容：SC-9-7-1

點與圓、直線與圓的位置關係

【教師用】





基本學習內容：SC-9-7-1

學習內容：

S-9-7 點、直線與圓的關係：點與圓的位置關係（內部、圓上、外部）；直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。

基本學習內容：

SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

基本學習表現：

SCP-9-7-1-1 認識點與圓的位置關係，並依據點到圓心的距離判斷此點位於圓的外部、圓上或圓的內部。

SCP-9-7-1-2 認識直線與圓的位置關係，並依據直線到圓心的距離判斷此直線與圓不相交、交於一點（相切）或交於兩點。

概要說明：

- 基本學習內容 SC-9-7-1 為 SC-7-3-1 的後續學習概念，故學生應已認識點到直線距離的意義。

- 本基本學習內容幫助學生認識點和圓及直線和圓的位置關係。

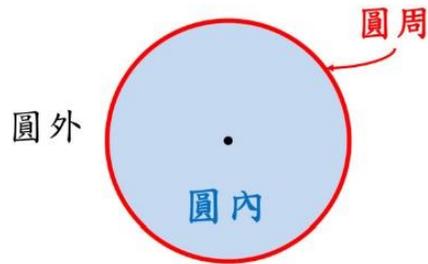


基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

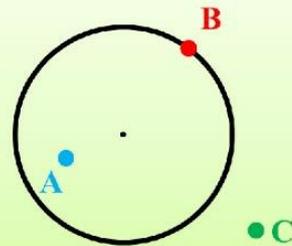
◎複習活動 I

圓內、圓周和圓外

如下圖，圓形將平面分割為三個部分：圓內、圓周、圓外



(1) 如右圖，圓形將平面分割為三個部分。
說說看，A、B、C 三點分別在哪一部分？



解：

我知道，A點在圓內、B點在圓周上、C點在圓外。

點與圓的位置關係：

| 點在圓內 | 點在圓上 | 點在圓外 |
|------|------|------|
| | | |

點在圓周上也可以稱為點在圓上。





教材內容說明：

1. 本教材第 1~3 頁的教學重點是幫助學生理解點與圓的關係。
2. 本頁上方複習活動I在說明圓形將平面分割為三部分：圓內、圓周、圓外。
3. 第(1)題給定圓形及平面上三點，要求學生回答三點分別在圓的哪一部分。

教師引導學生觀察到 A 點在圓內、B 點在圓周上、C 點在圓外。

4. 本頁下方教師提示重點在說明點與圓的位置關係有三種：點在圓內、點在圓上、點在圓外。



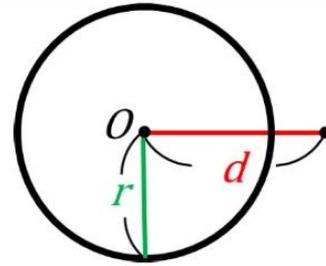
基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

◎圓心到點的距離

如右圖，

r 表示圓半徑，

d 表示圓心到點的距離。

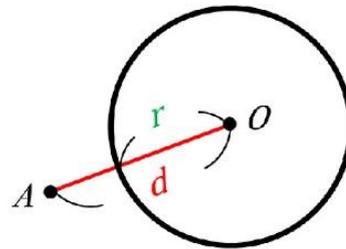


點與圓的位置關係中，圓心與點的距離有下列三種情況：

(1) 點在圓外

如右圖，圓心 O 到 A 點的距離大於半徑，

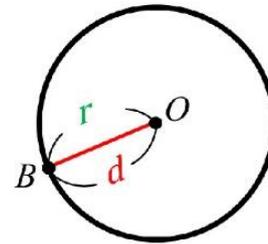
記為 $d > r$ 。



(2) 點在圓上

如右圖，圓心 O 到 B 點的距離等於半徑，

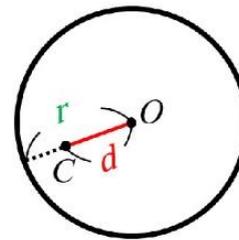
記為 $d = r$ 。



(3) 點在圓內

如右圖，圓心 O 到 C 點的距離等於半徑，

記為 $d < r$ 。





教材內容說明：

1. 本教材第 1~3 頁的教學重點是幫助學生理解點與圓的關係。
2. 本頁教材內容以「圓心到點的距離」說明點與圓的三種關係。

r 表示圓半徑、 d 表示圓心到點的距離

- (1) 點在圓外，圓心到點到距離大於半徑，記為 $d > r$ 。
- (2) 點在圓上，圓心到點到距離大於半徑，記為 $d = r$ 。
- (3) 點在圓內，圓心到點到距離大於半徑，記為 $d < r$ 。



基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

(2) 已知圓 O 的半徑為 3，如果圓心到 A 點的距離是 5，則 A 點會在圓 O 的內部、圓上或者外部？

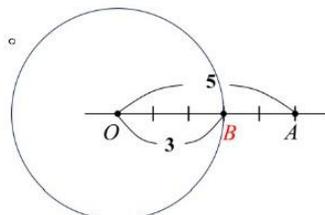
解：

方法一：如右圖，我把圖形畫出來，連接 \overline{OA} ， $\overline{OA}=5$ 。

在 \overline{OA} 上取一點 B 使得 $\overline{OB}=3$ 。

再以 O 為圓心、 \overline{OB} 為半徑畫圓，

發現 A 點在圓外。



方法二：因為圓心到 A 點的距離 $5 >$ 圓 O 的半徑 3，

則 $\overline{OA} >$ 半徑，所以 A 點在圓外。

點與圓的位置關係：

| 點在圓內 | 點在圓上 | 點在圓外 |
|---------|---------|---------|
| $d < r$ | $d = r$ | $d > r$ |
| | | |



(3) 已知圓 O 的半徑為 5，如果圓心到 A 、 B 、 C 三點的距離分別為 3、5、9，則 A 、 B 、 C 三點與圓 O 的位置關係為何？

解：

我把「圓心到點的距離」和「圓的半徑」做比較，發現：

① 「圓心到 A 點的距離 3」 $<$ 「圓的半徑 5」，所以 A 點在圓內。

② 「圓心到 B 點的距離 5」 $=$ 「圓的半徑 5」，所以 B 點在圓上。

③ 「圓心到 C 點的距離 9」 $>$ 「圓的半徑 5」，所以 C 點在圓外。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 1~3 頁的教學重點是幫助學生理解點與圓的關係。
2. 第(2)題給定「半徑」和「圓心到點的距離」，要求學生回答點在圓內、點在圓上或點在圓外。

本教材提供兩種解法：

方法一：依題意畫圖，看到點跟圓的關係再回答問題。

(1) 在平面上畫出 O 點及 A 點， $\overline{OA} = 5$ 。

(2) 在 \overline{OA} 上取一點 B，使得 $\overline{OB} = 3$ ，以 O 為圓心， \overline{OB} 為半徑畫圓，

發現 A 點在圓外。

方法二：比較「圓心到點的距離 d 」和「半徑 r 」的大小關係，發現 $d > r$ ，所以點在圓外。

3. 本頁教師提示重點在說明點與圓的位置關係。
4. 第(3)題給定「半徑」與「圓心到三點的距離」，要求學生回答三點與圓的位置關係。

教師引導學生利用「圓心到點的距離 d 」和「半徑 r 」的大小關係，判斷點與圓的位置關係：

① $d < r$ ，所以 A 點在圓內；

② $d = r$ ，所以 B 點在圓周；

③ $d > r$ ，所以 C 點在圓外。



基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

◎直線與圓的位置關係

如下圖一，平面上有一個圓 O 與一條直線 L ，直線 L 與圓 O 沒有交點。

如下圖二，將直線 L 水平向右移動，緩緩向圓 O 靠近，剛好與圓 O 產生1個交點。

如下圖三，將直線 L 繼續向右水平移動，與圓 O 產生2個交點。

如下圖四，將直線 L 繼續向右水平移動，與圓 O 仍有2個交點。

如下圖五，將直線 L 繼續向右水平移動，恰好與圓 O 剩下1個交點。

如下圖六，將直線 L 繼續向右水平移動，直線 L 與圓 O 沒有交點。

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| | | |
| 直線與圓不相交 | 直線與圓恰交於一點 | 直線與圓相交於兩點 |
| 圖一 | 圖二 | 圖三 |
| | | |
| 直線與圓不相交 | 直線與圓恰交於一點 | 直線與圓不相交 |
| 圖四 | 圖五 | 圖六 |



教材內容說明：

1. 本教材第 4~8 頁的教學重點是幫助學生理解直線與圓的關係。
2. 本頁教材內容透過移動平面上的一直線，看到直線與圓的三種關係。
 - (1) 直線與圓不相交：沒有交點。
 - (2) 直線與圓恰交於一點：1 個交點。
 - (3) 直線與圓相交於兩點：2 個交點。



基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

複習活動 II

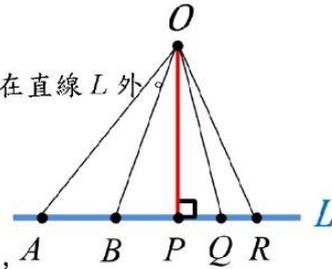
「點到直線的距離」

如右圖， A 、 B 、 P 、 Q 、 R 這 5 個點在直線 L 上， O 點在直線 L 外。

連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 。已知 $\overline{OP} \perp L$ ，

則 \overline{OP} 為 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 中長度最短的線段，

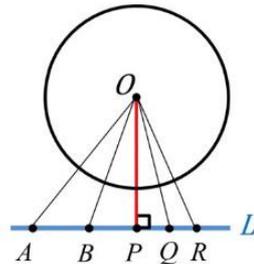
所以 O 點到直線 L 的距離就是 \overline{OP} 。



◎圓心到直線的距離

如右圖，因為 $\overline{OP} \perp L$ ，

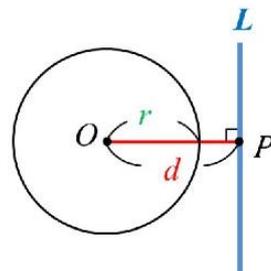
所以圓心 O 到直線 L 的距離為 \overline{OP} 。



如右圖，

r 表示圓半徑，

d 表示圓心到點的距離。



**教材內容說明：**

1. 本教材第 4~8 頁的教學重點是幫助學生理解直線與圓的關係。
 2. 本頁上方複習活動II在說明**點到直線的距離**就是**點與垂足的連線長**。
 - 點到直線的距離有兩種等價定義：
 - (1) 點到垂足的連線長。
 - (2) 點與直線上任一點距離的最小值。
- 因此「**點與直線上任一點的連線長**」一定大於等於「**點與垂足的連線長**」。
3. 本頁下方教材內容以「**圓心到直線的距離**」與「**半徑**」的大小關係說明直線與圓的三種關係。
 r 表示圓半徑、 d 表示圓心到直線的距離。

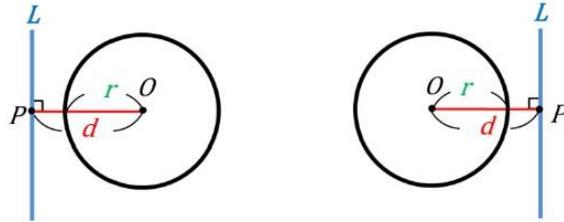


基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

直線與圓的位置關係中，圓心與直線的距離有下列三種情況：

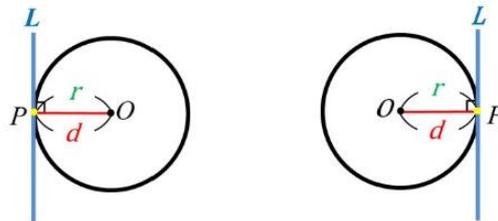
(1) 直線與圓不相交(沒有交點)

如下圖，直線與圓不相交表示「直線上每一點都在圓的外部」，
 所以「圓心 O 到直線上任意一點的距離」都大於半徑，
 表示「圓心 O 到直線 L 的距離 d 」大於「半徑 r 」，記為 $d > r$ 。



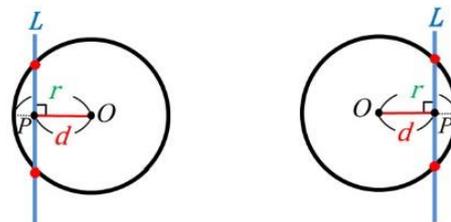
(2) 直線與圓恰交於一點(1 個交點)

如下圖，直線與圓恰交於一點表示「直線上恰有一點 P 在圓上，
 其它點都在圓的外部」，
 所以「圓心 O 到 P 點的距離」就是「圓心到直線的距離」。
 所以「圓心 O 到直線 L 的距離 d 」等於「半徑 r 」，記為 $d = r$ 。



(3) 直線與圓相交於兩點(2 個交點)

如下圖，直線與圓相交於兩點表示「直線上恰有 2 個點在圓上，
 在此 2 點之間的點都在圓內部，其它的點都在圓外部」。
 所以「圓心 O 到直線 L 的距離 d 」小於「半徑 r 」，記為 $d < r$ ，





教材內容說明：

1. 本教材第 4~8 頁的教學重點是幫助學生理解直線與圓的關係。
2. 本頁教材內容以「圓心到直線的距離」與「半徑」的大小關係說明直線與圓的三種關係。

r 表示圓半徑、 d 表示圓心到直線的距離。

- (1) 直線與圓不相交，即為 $d > r$ 。
- (2) 直線與圓恰交於一點，即為 $d = r$ 。
- (3) 直線與圓相交於兩點，即為 $d < r$ 。

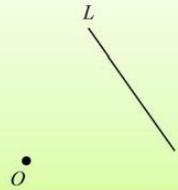


基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

(4) 右圖有一點 O 與一直線 L 。

已知 O 點到直線 L 的距離為 4，圓 O 的半徑是 5，

請問圓 O 與直線 L 有幾個交點？



解：

方法一：如右圖，

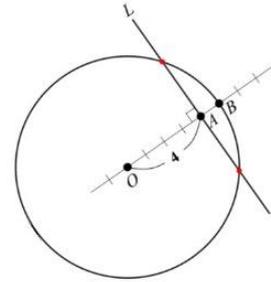
我作一條過 O 點且垂直 L 的直線，交點為 A ，

\overline{OA} 就是 O 點到直線 L 的距離，所以 $\overline{OA}=4$ 。

在 \overline{OA} 上取一點 B ，使得 $\overline{OB}=5$ ，

以 O 為圓心， $\overline{OB}=5$ 為半徑畫圓，

發現圓 O 與直線 L 有 2 個交點。



方法二：我把「圓心 O 到直線 L 的距離」和「圓的半徑」做比較，

發現「圓心到直線 L 的距離為 4」 < 「圓的半徑 5」，

所以圓 O 與直線 L 有 2 個交點。

直線與圓的位置關係：

| 直線與圓不相交 | 直線與圓恰交於一點 | 直線與圓相交於兩點 |
|---------|-----------|-----------|
| $d > r$ | $d = r$ | $d < r$ |
| | | |
| | | |



**教材內容說明：**

1. 本教材第 4~8 頁的教學重點是幫助學生理解直線與圓的關係。
2. 第(4)題給定平面上 O 點到直線 L 的距離及半徑，要求學生回答圓 O 與直線 L 有幾個交點。

本教材提供兩種解法：

方法一：依題意畫圖，看到直線與圓的關係再回答問題。

(1) 作一直線 $\overline{OA} \perp L$ ， $\overline{OA} = 4$ 。

(2) 在 \overline{OA} 上取一點 B，使得 $\overline{OB} = 5$ ，以 O 為圓心， \overline{OB} 為半徑畫圓，

發現圓 O 與直線 L 有 2 個交點。

方法二：比較「圓心到直線的距離」和「半徑」的大小關係，

發現「圓心到直線的距離」 $<$ 「半徑」，所以圓 O 與直線 L 有 2 個交點。

3. 本頁下方教師提示重點在說明直線與圓的位置關係。



基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

(5) 已知圓 O 的半徑為 10，若圓心到三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離分別為 7、10、13，則 L_1 、 L_2 、 L_3 與圓 O 分別有幾個交點？

解：

我把「圓心到直線的距離」和「圓的半徑」做比較，發現：

- ① 「圓心到直線 L_1 的距離為 7」 $<$ 「圓的半徑 10」，
所以直線 L_1 與圓 O 相交於兩點，有 2 個交點。
- ② 「圓心到直線 L_2 的距離為 10」 $=$ 「圓的半徑 10」，
所以直線 L_2 與圓 O 恰交於一點，有 1 個交點。
- ③ 「圓心到直線 L_3 的距離為 13」 $>$ 「圓的半徑 10」，
所以直線 L_3 與圓 O 不相交，沒有交點。

**教材內容說明：**

1. 本教材第 4~8 頁的教學重點是幫助學生理解直線與圓的關係。
2. 第(5)題給定圓 O 半徑及圓心到三條直線的距離，要求學生回答三條直線與圓 O 分別有幾個交點。

教師引導學生利用「圓心到直線的距離」和「半徑」的大小關係，判斷直線與圓的位置關係：

- ① 「圓心到直線的距離」 $<$ 「半徑」，所以直線與圓相交於兩點，有 2 個交點；
- ② 「圓心到直線的距離」 $=$ 「半徑」，所以直線與圓恰交於一點，有 1 個交點；
- ③ 「圓心到直線的距離」 $>$ 「半徑」，所以直線與圓不相交，沒有交點。

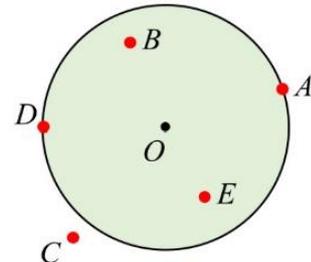


基本學習內容：SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。



小試身手

(1) 如右圖，判斷 A 、 B 、 C 、 D 、 E 各點與圓 O 的位置關係：



- ① 在圓外的點是：_____。
- ② 在圓上的點是：_____。
- ③ 在圓內的點是：_____。

答：① C ② A 、 D ③ B 、 E

(2) 承上題，圓 O 的半徑為 r ，分別連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 、 \overline{OD} 、 \overline{OE} ，

請比較 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 、 \overline{OD} 、 \overline{OE} 與 r 的大小關係(填入 $>$ 、 $<$ 、或 $=$)。

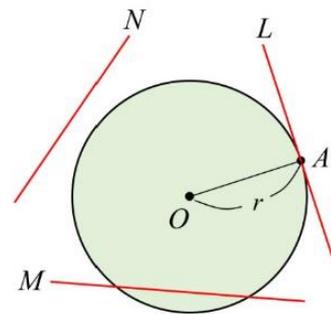
- ① \overline{OA} _____ r 。
- ② \overline{OB} _____ r 。
- ③ \overline{OC} _____ r 。
- ④ \overline{OD} _____ r 。
- ⑤ \overline{OE} _____ r 。

答：① $=$ ② $<$ ③ $>$ ④ $>$ ⑤ $<$

(3) 已知圓 O 的半徑 $\overline{OA}=r$ ，且直線 L 和 \overline{OA} 垂直於 A 點。

如右圖，在下列各空格中填入適當的答案：

- ① 直線 L 與圓 O 有 _____ 個交點。
- ② 直線 M 與圓 O 有 _____ 個交點。
- ③ 直線 N 與圓 O 有 _____ 個交點。
- ④ 假設圓心 O 到直線 M 、 N 的距離分別為 r_1 、 r_2 ，



則 r 、 r_1 、 r_2 的大小順序為 _____ $>$ _____ $>$ _____。

答：① 1 ② 2 ③ 0 ④ $r_2 > r > r_1$



基本學習內容：SC-9-7-1

教材內容說明：

1. 本頁小試身手提供點與圓的位置關係及直線與圓的位置關係練習。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學 **9** 年級數學
學生學習扶助教材

