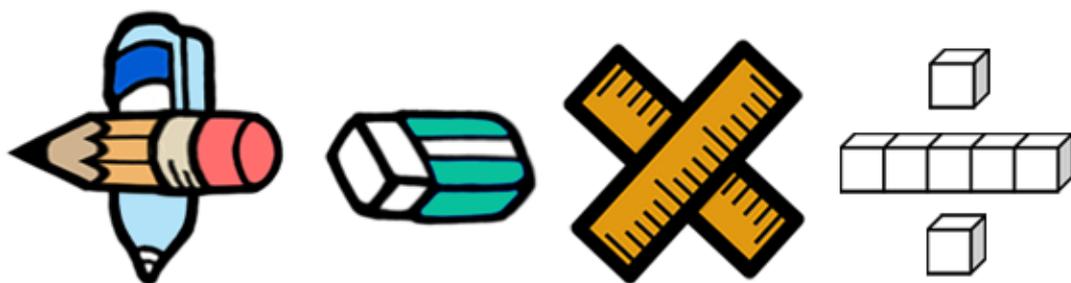




基本學習內容：SC-9-13-3

直角柱、直圓柱的體積

【教師用】



**學習內容：**

S-9-13 表面積與體積：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；

直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。

備註：S-6-4 僅教授「直柱體的體積」，本條目除了複習並加深直柱體的體積概念，並且透過直柱體與正錐體的展開圖，計算其表面積。

基本學習內容：

SC-9-13-1 多面體的意義。

SC-9-13-2 直角柱、正角錐、直圓柱、直圓錐的展開圖、側面積及表面積。

SC-9-13-3 直角柱、直圓柱的體積。

基本學習表現：

SCP-9-13-3-1 理解直角柱、直圓柱的體積為底面積與高的乘積。

概要說明：

■ 基本學習內容SC-9-13-3是S-6-4-1的後續學習概念，故學生應該已經認識柱體體積。
本基本學習內容幫助學生學習直多角柱的體積。

■ 國小僅討論三角柱及四角柱的體積，國中增加討論正六角柱的體積。

■ 建議老師應先做下列說明，

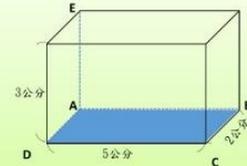
- (1) 三角柱體積為底面三角形面積與高的乘積。
- (2) 梯形柱體體積為底面梯形面積與高的乘積。
- (3) 圓柱體體積為底面圓面積與高的乘積。



基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

◎四角柱的體積為底面積與高的乘積

(1) 右圖是一個四角柱，四角柱的底面是長方形 ABCD，
請問四角柱的體積是多少立方公分？



解：

底面是長方形的四角柱是一個長方體。

長方體體積 = 長 × 寬 × 高

長方體體積 = $5 \times 2 \times 3 = 30$

答：柱體體積是 30 立方公分



$$\begin{array}{c} \boxed{\text{長}} \times \boxed{\text{寬}} \times \boxed{\text{高}} \\ \underline{5 \times 2} \times 3 = 30 \\ \boxed{\text{底面積}} \times \boxed{\text{柱高}} \end{array}$$

📖 四角柱「長方形底面 ABCD」的面積，
就是長方體體積公式的「長×寬」。

📖 四角柱中的 \overline{AE} 和底面垂直，
 \overline{AE} 的長是長方體體積公式中的「高」
所以可以將 \overline{AE} 看成四角柱的柱高。

$$\begin{aligned} \text{四角柱體積} &= \text{長方體體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高} \\ &= (\text{長} \times \text{寬}) \times \text{高} = \text{底面積} \times \text{高} \end{aligned}$$

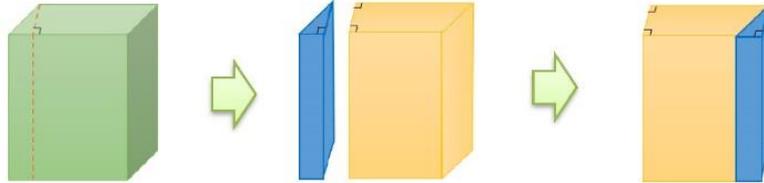
**教材內容說明：**

1. 本教材第 1 頁的教學重點是能理解四角柱的體積是底面積與高的乘積。
2. 本基本學習內容所指稱的角柱及圓柱都只限於直角柱及直圓柱。
3. 第(1)題直接宣告該形體是四角柱，且稱呼該四角柱其中一面為底面，請學生算出四角柱的體積。
 - 學生連接舊經驗，知道圖上的形體也可以稱為長方體，並運用長方體的體積公式（長×寬×高）來解題。
 - 教師協助連結長方體與四角柱的關係。透過發現四角柱中的長方形底面面積就是長方體體積公式中的長×寬，推出四角柱體積公式為底面積×高。



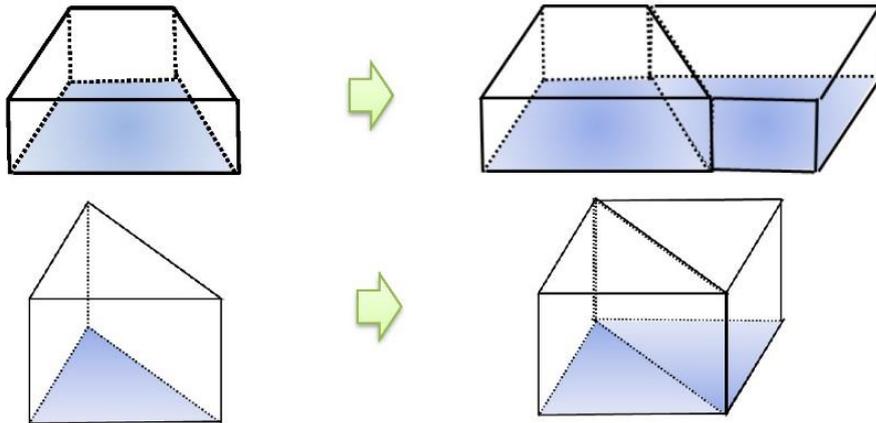
基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

◎能運用底面積與高的乘積計算柱體體積



底面是平行四邊形的四角柱甲，可以切割重組成底面是長方形的四角柱乙。
四角柱甲和四角柱乙的底面積和高都相等，
四角柱甲和四角柱乙的體積相等。

$$\text{四角柱甲的體積} = \text{底面積} \times \text{高}$$



底面是梯形的四角柱、底面是三角形的三角柱，
將兩個一樣的柱體拼起來後，
可以重組成底面是平行四邊形的四角柱或是底面是長方形的四角柱。

底面是長方形的四角柱、底面是平行四邊形的四角柱、
底面是梯形的四角柱，都是四角柱的一種。

角柱的體積都可以用角柱公式計算。

$$\text{角柱體積} = \text{底面積} \times \text{高}$$

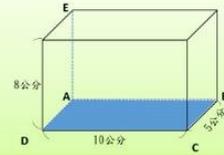
**教材內容說明：**

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是能理解底面是平行四邊形的四角柱、底面是梯形的四角柱都是四角柱的一種，三角柱體是四角柱體的一半，圓柱透過切割重組也可以組成平行四邊形柱，這些柱體的體積皆可以用底面積與高的乘積計算。
2. 圖一是一個平行四邊形柱體，學生透過切割、平移、重組，發現平行四邊形柱甲可以變成平行四邊形柱乙，而甲乙兩個主體的底面積和高都相等，因此體積相等。
因為體積相等，所以平行四邊形柱可以用四角柱的體積公式計算體積。
3. 圖二是一個梯形柱體，學生透過複製、平移、重組，發現梯形柱是平行四邊形柱的一半，所以也可以用四角柱的體積公式計算體積。
4. 圖三是一個三角柱，三角柱的底面是三角形，學生從有五年級的舊經驗知道，兩個相同的三角形可以拼成一個平行四邊形或長方形，因此兩個相同的三角柱也可以拼成一個四角柱，可用四角柱體積公式（底面積 \times 高）來算出體積。



基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

(2) 右圖是一個四角柱，四角柱的底面是長方形 ABCD，
請問四角柱的體積是多少立方公分？

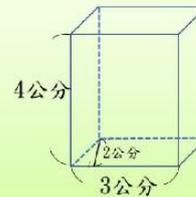


解：

$$\begin{aligned} \text{角柱體積} &= \text{底面積} \times \text{高} \\ &= (5 \times 10) \times 8 \\ &= 50 \times 8 \\ &= 400 \end{aligned}$$

答：柱體體積 400 立方公分

(3) 右圖是一個四角柱，它的底面是平行四邊形，
請問這個四角柱的體積是多少立方公分？

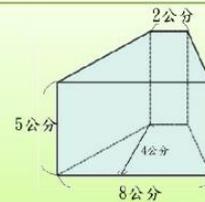


解：

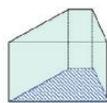
$$\begin{aligned} \text{角柱體積} &= \text{底面積} \times \text{高} \\ &= (3 \times 2) \times 4 \\ &= 6 \times 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

答：柱體體積是 24 立方公分

(4) 右圖是一個四角柱，它的底面是梯形，
請問這個四角柱的體積是多少立方公分？



解：



畫斜線的部分是
這個形體的底面。

角柱體積 = 底面積 × 高

$$\begin{aligned} &= \frac{(8 + 2) \times 4}{2} \times 5 \\ &= 10 \times 4 \times 5 \\ &= 40 \times 5 \\ &= 200 \end{aligned}$$

答：柱體體積是 200 立方公分

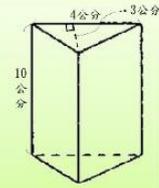
**教材內容說明：**

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是能理解底面是平行四邊形的四角柱、底面是梯形的四角柱都是四角柱的一種，三角柱體是四角柱體的一半，圓柱透過切割重組也可以組成平行四邊形柱，這些柱體的體積皆可以用底面積與高的乘積計算。
2. 第(2)題學生可運用長方形體積公式或是四角柱體積公式進行解題。
運用四角柱體積公式列式時，建議學生將「底面積」先算的部分用括號表示，
例如： $(長 \times 寬) \times 高$ 。
3. 第(3)題是一個平行四邊形柱體，學生透過切割、平移、重組，發現平行四邊形柱甲可以變成平行四邊形柱乙，而甲乙兩個主體的底面積和高都相等，因此體積相等。
因為體積相等，所以平行四邊形柱可以用四角柱的體積公式計算體積。
4. 第(4)題是一個梯形柱，因為梯形柱也是四角柱所以可以用四角柱的體積公式(底面積 \times 高)來算出體積。

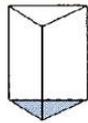


基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

- (5) 右圖的底面是一個三角形，稱為三角柱。
請問這個三角柱的體積是多少立方公分？



解：



畫斜線的部分是
這個形體的底面。

角柱體積 = 底面積 × 高

$$= (4 \times 3 \times \frac{1}{2}) \times 10$$

底面積 × 柱高

$$= 6 \times 10$$

$$= 60$$

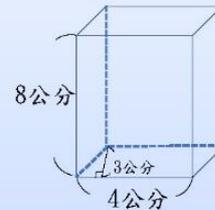
答：三角柱體積是 60 立方公分



隨堂練習

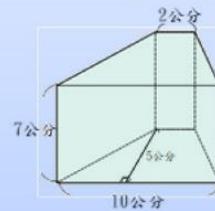
- (1) 右圖是一個四角柱，它的底面是平行四邊形，
請問這個四角柱的體積是多少立方公分？

答：96 立方公分



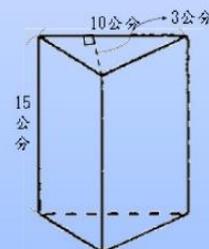
- (2) 右圖是一個四角柱，它的底面是梯形，
請問這個四角柱的體積是多少立方公分？

答：210 立方公分



- (3) 右圖的底面是一個三角形，我們稱它為三角柱。
請問這個三角柱的體積是多少立方公分？

答：225 立方公分



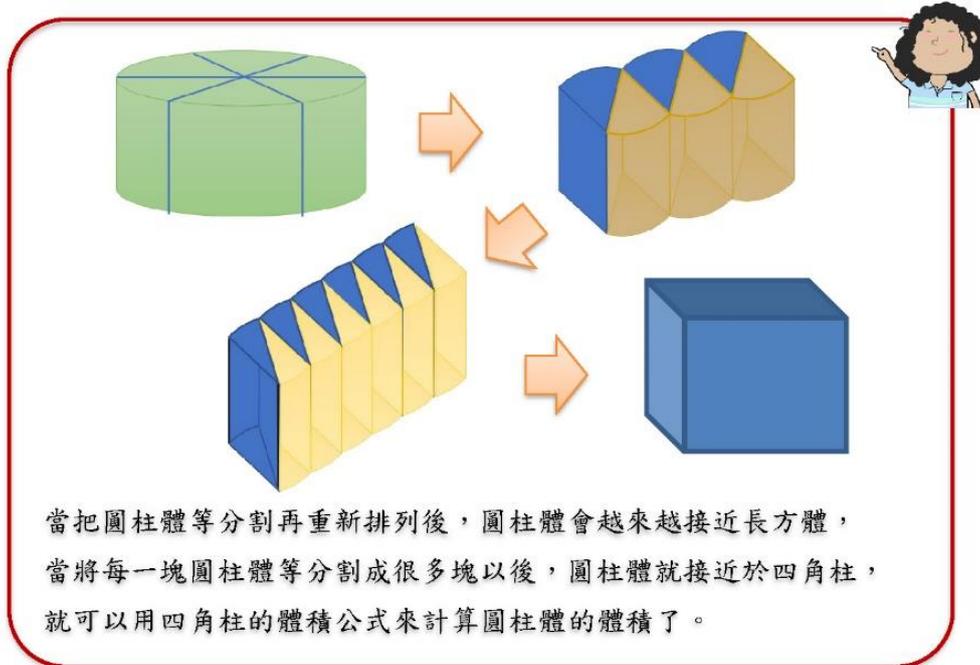
**教材內容說明：**

1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是能理解底面是平行四邊形的四角柱、底面是梯形的四角柱都是四角柱的一種，三角柱體是四角柱體的一半，圓柱透過切割重組也可以組成平行四邊形柱，這些柱體的體積皆可以用底面積與高的乘積計算。
2. 第(5)題是一個三角柱，三角柱的底面是三角形，學生從有五年級的舊經驗知道，兩個相同的三角形可以拼成一個平行四邊形或長方形，因此兩個相同的三角柱也可以拼成一個四角柱，可用四角柱體積公式（底面積 \times 高）來算出體積。
3. 隨堂練習第(1)題到第(3)題提供立體圖，學生需要在圖中找到底面積，並算出柱體體積。



基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

- (6) 右圖是一個底面半徑為 10 公分，高為 5 公分的圓柱，
請問這個圓柱體積是多少立方公分？



當把圓柱體等分割再重新排列後，圓柱體會越來越接近長方體，
當將每一塊圓柱體等分割成很多塊以後，圓柱體就接近於四角柱，
就可以用四角柱的體積公式來計算圓柱體的體積了。

解：

$$\begin{aligned}
 \text{圓柱體的體積} &= \text{底面積} \times \text{高} \\
 &= (10 \times 10 \times \pi) \times 5 \\
 &= \boxed{\text{底面積}} \times \boxed{\text{高}} \\
 &= (100 \times \pi) \times 5 \\
 &= 500\pi
 \end{aligned}$$

答：圓柱的體積是 500π 立方公分



一個底面半徑為 10 公分，高為 5 公分的圓柱，請問體積是多少立方公分？

答： 500π 立方公分

**教材內容說明：**

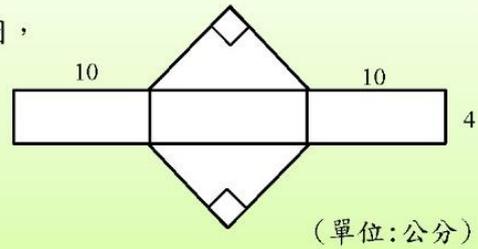
1. 本教材第 2~5 頁的教學重點是能理解底面是平行四邊形的四角柱、底面是梯形的四角柱都是四角柱的一種，三角柱體是四角柱體的一半，圓柱透過切割重組也可以組成平行四邊形柱，這些柱體的體積皆可以用底面積與高的乘積計算。
2. 第(6)題是一個圓柱，透過切割重組的示意圖，學生可以觀察到將一個圓柱等分割的越細，重組後的形體就越接近四角柱，因此可用四角柱體積公式（底面積 \times 高）來算出體積。
3. 隨堂練習題給半徑，學生需先算出底面積再算出柱體體積。



基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

◎由展開圖求柱體體積

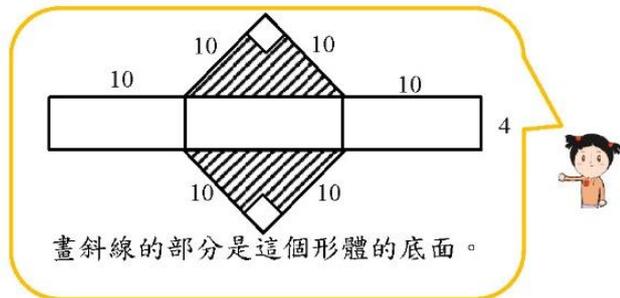
(7) 右圖是一個三角柱蛋糕包裝盒的展開圖，
求此三角柱的體積。



(單位:公分)

解：

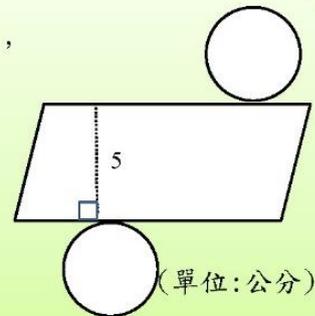
$$\begin{aligned} \text{角柱體積} &= \text{底面積} \times \text{高} \\ &= \left(10 \times 10 \times \frac{1}{2}\right) \times 4 \\ &= 50 \times 4 \\ &= 200 \end{aligned}$$



畫斜線的部分是這個形體的底面。

答：三角柱的體積是200立方公分

(8) 右圖是一個底面半徑為2，高為5的圓柱體展開圖，
求此圓柱的體積。



(單位:公分)

解：

$$\begin{aligned} \text{圓柱體積} &= \text{底面積} \times \text{高} \\ &= (2 \times 2 \times \pi) \times 5 \\ &= 20\pi \end{aligned}$$

答：圓柱的體積是 20π 立方公分

**教材內容說明：**

1. 本教材第 6 頁的教學重點是幫助學生從展開圖求該柱體體積。

2. 第(7)題是給定一三角柱展開圖，要求學生計算出三角柱體積。

幫助學生由展開圖找出三角柱的底面以及柱高，再利用「柱體體積=底面積×高」計算出體積。

- 幫助學生複習三角柱的意義，即上下底面皆為全等的三角形，側面皆為長方形的柱體。
- 應幫助學生由展開圖先找到三角形(此展開圖應有兩個三角形)，即為三角柱的底面。其次再找出長方形(此展開圖應有三個長方形)，其一邊長即為柱高。

3. 第(8)題是給定一圓柱展開圖，要求學生計算出圓柱體積。

幫助學生由展開圖找出圓柱的底面以及柱高，再利用「柱體體積=底面積×高」計算出體積。

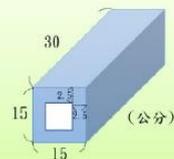
- 幫助學生複習圓柱的意義，即上下底面皆為全等的圓形，側面為一張長方形(或平行四邊形)捲成的圓筒。
- 應幫助學生由展開圖先找到圓形(此展開圖應有兩個圓形)，即為圓柱的底面。其次再找出平行四邊形(此展開圖應有一個平行四邊形)，平行四邊形的高即為柱高。



基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

◎複合形體的體積

(9) 右圖是一個空心的長方體柱，每邊厚度 2.5 公分，請問右圖形體的體積是多少立方公分？



解：

方法一：

$$15 \times 15 \times 30 = 6750 \quad \dots\dots \text{先算完整的長方體體積}$$

$$15 - 2.5 \times 2 = 10 \quad \dots\dots \text{再算挖空的長方體的底面邊長}$$

$$10 \times 10 \times 30 = 3000 \quad \dots\dots \text{然後算挖空的長方體的體積}$$

$$6750 - 3000 = 3750 \quad \dots\dots \text{最後算挖空後的形體體積}$$

可以用併式將做法記錄下來：

$$15 \times 15 \times 30 - 10 \times 10 \times 30 = 3750$$



方法二：

$$15 - 2.5 \times 2 = 10 \quad \dots\dots \text{先算挖空的長方體的長}$$

$$(15 \times 15 - 10 \times 10) \times 30 = 3750 \quad \dots\dots \text{底面積} \times \text{高}$$

答：體積是 3750 立方公分



隨堂練習

如下圖，一個拱型積木的底面是一個長方形去除一個半圓的圖形，其中長方形的長為 6 公分、寬為 4 公分，半圓的半徑為 1 公分，如果此積木的厚度為 2 公分，求此積木的體積為多少立方公分？ 答： $48 - \pi$ 立方公分



**教材內容說明：**

1. 本教材第 7~8 頁的教學重點是複合形體的體積。
2. 第(9)題為一個空心的長方體柱，空心部分的柱體和整個柱體的高一樣，底面積不同。
 - 學生可分別算出空心部分的柱體體積，再算出整個柱體的體積，兩個體積相減後，即可算出空心柱體的體積。
 - 方法二是先算出空心柱的底面積，利用「底面積 \times 高」來算出柱體體積。教師可引導學生發現，方法二可以簡化運算步驟，是較有效率的解題策略。
3. 隨堂練習給定一半圓和長方形複合圖形，學生需先算出底面積再算出柱體體積。



基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。

- (10) 右圖的小圓柱的底面是半徑 6 公分的圓，
大圓柱的底面是半徑 8 公分的圓，
這兩個圓柱的高都是 10 公分。
請問這個形體的體積是多少立方公分？



解：

$$6 \times 6 \times \pi \times 10 = 360\pi \quad \dots\dots \text{先算小圓柱體體積}$$

$$8 \times 8 \times \pi \times 10 = 640\pi \quad \dots\dots \text{再算大圓柱體體積}$$

$$360\pi + 640\pi = 1000\pi \quad \dots\dots \text{再把兩個圓柱體體積加起來}$$



也可以用併式將做法記錄下來：

$$6 \times 6 \times \pi \times 10 + 8 \times 8 \times \pi \times 10 = 1000\pi$$

答：體積是 1000π 立方公分



隨堂練習

下圖是一根長度為 4 公分的空心捲心酥，且捲心酥的內、外直徑分別為 0.9 公分與 1.2 公分，求此捲心酥餅乾部分的體積。答： 2.52π 立方公分



**教材內容說明：**

1. 本教材第 7~8 頁的教學重點是複合形體的體積。
2. 第(10)題為兩個底面積不同，高相同的圓柱，問兩個圓柱的體積和。
 - 學生可分別算出兩個柱體的體積，再算出兩柱體的體積和。
 - 在國小學習階段圓周率皆以 3.14 做計算，學生需使用分配律將 3.14 提出後再進行計算，可簡化計算。在國中學習階段圓周率皆以符號 π 表示，學生必需具備代數計算能力，例如： $360\pi + 640\pi = 1000\pi$ 。
3. 隨堂練習給定空心圓柱體，學生需先算出底面積再算出柱體體積。



基本學習內容：SC-9-13-3 直角柱、圓柱的體積。



小試身手

1. 如右圖，已知一個三角柱模型，底面是邊長 4 公分的正三角形，高為 10 公分，求此三角柱模型的體積。

答： $40\sqrt{3}$ 立方公分

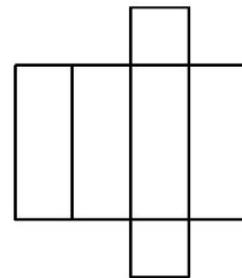


2. 甲是底面積為 45 平方公分，高 20 公分的四角柱，乙是底面積為 15 平方公分，高 20 公分的四角柱，請問甲的體積和乙的體積相差多少平方公分？

答：600 立方公分

3. 右圖為底邊正方形邊長為 2 公分的蠟筆小新餅乾包裝盒展開圖，若餅乾盒高 12 公分，請問餅乾盒的體積為多少立方公分？

答：4 立方公分



4. 小圓柱的底面是半徑 6 公分的圓，大圓柱的底面是半徑 8 公分的圓，小圓柱的高是 10 公分，大圓柱的高是 15 公分。請問小圓柱和大圓柱的體積和是多少立方公分？

答： 1320π 立方公分



教材內容說明：

1. 本頁小試身手針對本基本學習內容做綜合練習。
2. 第 1 題給定三角柱，做柱體體積練習。
3. 第 2 題給定兩底面積不同，高相同的四角柱，做柱體體積差練習。
4. 第 3 題給定一長方體展開圖，做柱體體積差練習。
5. 第 4 題給定兩半徑不同，高不同的圓柱，做柱體體積和練習。



教育部國民及學前教育署 編

國民中學 **9** 年級數學
學生學習扶助教材

