

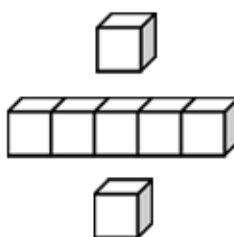
基本學習內容：NC-9-1-1、2

連比與連比例式的意義及記法

連比例式的基本運算及應用問題

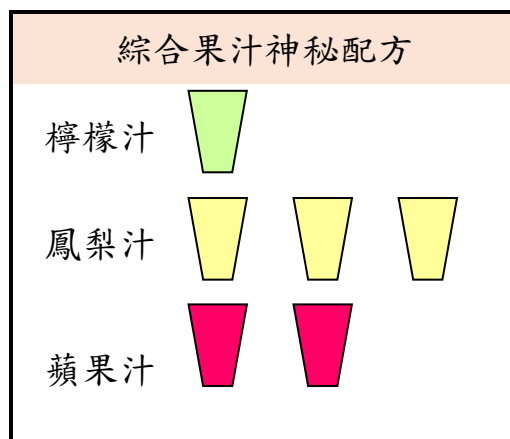
班級：_____

姓名：_____



◎連比和連比例式的記法與意義

學校辦理園遊會，小明提議班上來賣飲料，他有一種綜合果汁的神秘配方如右表所示：他用檸檬汁 1 杯、鳳梨汁 3 杯與蘋果汁 2 杯混合調配成一壺綜合果汁，同學試喝後都覺得好喝，後來決議就用這樣的比例混合調配一桶綜合果汁在園遊會販賣，也就是檸檬汁 1 份、鳳梨汁 3 份、蘋果汁 2 份把它們混合調配成一桶綜合果汁。



為了方便記錄每份「綜合果汁」中所含檸檬汁、鳳梨汁與蘋果汁成分的比，我們可記為 $1:3:2$ ，像這樣 **3 個數** 或 **3 個以上的數** 連續的比，稱為**連比**。

由這份配方可知，每份「綜合果汁」中所含的某兩種果汁的成份比如下：

- (1) 檸檬汁與鳳梨汁的成份比為 $1:3$
- (2) 鳳梨汁與蘋果汁的成份比為 $3:2$
- (3) 檸檬汁與蘋果汁的成份比為 $1:2$

(1) 已知一杯的容量是 100 毫升，依照老師給的綜合果汁配方：

「檸檬汁：鳳梨汁：蘋果汁 = $1:3:2$ 」，請回答下列問題：

- ① 調配一杯 600 毫升的綜合果汁，應如何調配？
- ② 園遊會要準備一桶 12 公升的綜合果汁，應如何調配？

解：

- ① 假設 1 份是 1 毫升，可用檸檬汁 1 毫升、鳳梨汁 3 毫升及蘋果汁 2 毫升調配出綜合果汁 6 毫升。若要調配 600 毫升的綜合果汁， $600 \div 6 = 100$ ，可以選擇
1 份是 100 毫升，以下列方式調配：
 - 檸檬汁 $100 \times 1 = 100$ (毫升)
 - 鳳梨汁 $100 \times 3 = 300$ (毫升)
 - 蘋果汁 $100 \times 2 = 200$ (毫升)
- ② 假設 1 份是 1 公升，調配出來的綜合果汁就是 6 公升，若要準備一桶 12 公升的綜合果汁，可選擇 1 份是 $12 \div 6 = 2$ (公升)，以下列方式調配：
 - 檸檬汁 $2 \times 1 = 2$ (公升)
 - 鳳梨汁 $2 \times 3 = 6$ (公升)
 - 蘋果汁 $2 \times 2 = 4$ (公升)

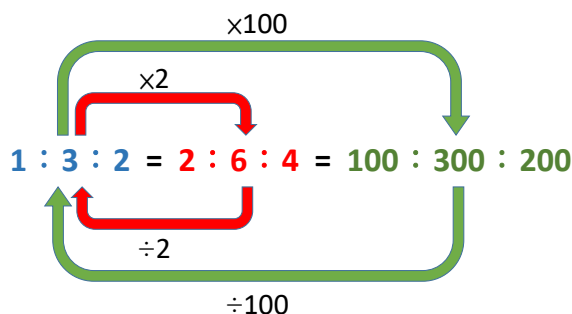


從上面我們發現 $1:3:2$ 和 $100:300:200$ 是相等的連比，
可記成 $1:3:2=100:300:200$ ；
同樣地， $1:3:2$ 和 $2:6:4$ 也是相等的連比，
也可記成 $1:3:2=2:6:4$ 。



我們由前面相等的連比可以發現：

- (1) $1:3:2$ 每項乘上 2 可得相等的連比
 $2:6:4$ 。相對地， $2:6:4$ 每項除以 2
可得相等的連比 $1:3:2$ 。
- (2) $1:3:2$ 每項乘上 100 可得相等的連比
 $100:300:200$ 。相對地， $100:300:200$
每項除以 100 可得相等的連比 $1:3:2$ 。



由上可知將一個連比的各項同乘以或同除以相同的數，
所得的連比還是相同的。



重點整理

- (1) 【相等的比】，假設 a 、 b 、 m 是三個皆不為 0 的數：
 - ① $a:b=(a \times m):(b \times m)$
 - ② $a:b=(a \div m):(b \div m)$
- (2) 【相等的連比】，假設 a 、 b 、 c 、 m 是四個皆不為 0 的數：
 - ① $a:b:c=(a \times m):(b \times m):(c \times m)$
 - ② $a:b:c=(a \div m):(b \div m):(c \div m)$

(2) 判斷下列何者是相等的連比？

- ① $3:2:4$ 和 $9:6:12$ ② $2:5:3$ 和 $6:9:7$

解：

- ① 考慮 $3:2:4$ 和 $9:6:12$ 的第 1 項， $9 \div 3=3$ (倍)，
 $3 \times 3=9$ ， $2 \times 3=6$ ， $4 \times 3=12$ ，故 $3:2:4=9:6:12$ 。
- ② 考慮 $2:5:3$ 和 $6:9:7$ 的第 1 項， $6 \div 2=3$ (倍)，
 $2 \times 3=6$ ， $5 \times 3=15$ ， $3 \times 3=9$ ，
得到 $2:5:3=6:15:9$ ，故 $2:5:3 \neq 6:9:7$ 。



隨堂練習

(1) 判斷下列何者是相等的連比？

- ① $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$ 和 $3:4:2$ ② $6:5:4$ 和 $3:2:1$

已知三個整數 a 、 b 、 c 皆不等於 0， $a:b:c$ 稱為整數比。若 a 、 b 、 c 沒有共同的質因數（或者三數的最大公因數是 1），則連比 $a:b:c$ 稱為**最簡整數比**。

(3) 請將下列連比化為最簡整數比：

- ① $12:18:24$ ② $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$

解：

① 【方法一】

$12=2^2 \times 3$ ， $18=2 \times 3^2$ ， $24=2^3 \times 3$ ，所以 12、18、24 有共同質因數 2 和 3，
 $12:18:24$ （同 $\div 2$ ）= $6:9:12$ （同 $\div 3$ ）= $2:3:4$

【方法二】

因為 12、18、24 的最大公因數是 6，

故 $12:18:24$ 最簡整數比為 $\frac{12}{6}:\frac{18}{6}:\frac{24}{6}=2:3:4$

② 先將 $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$ 化為三項都是整數的比，分母 4、6、3 的最小公倍數 $[4,6,3]=12$ ，

$\frac{1}{4} \times 12:\frac{1}{6} \times 12:\frac{1}{3} \times 12=3:2:4$ ，此時 3、2、4 的最大公因數是 1，

所以 $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$ 的最簡整數比= $3:2:4$



隨堂練習

(1) 請將下列連比化為最簡整數比：

- ① $24:36:60$ ② $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{3}{2}$



- (4) 小美帶 12 罐蘋果汁(每罐容量 300 毫升)給班上同學調配成綜合果汁，若依照「檸檬汁：鳳梨汁：蘋果汁=1：3：2」的配方，而且要把小美的蘋果汁全都用完，請問班上同學還要準備多少容量的檸檬汁和鳳梨汁？

解：

【方法一】

蘋果汁共 $12 \times 300 = 3600$ (毫升)，由配方檸檬汁：鳳梨汁：蘋果汁 = 1：3：2，可以假設 2 份相當於 3600(毫升)，1 份為 $3600 \div 2 = 1800$ (毫升)，所以檸檬汁需要 1 份 1800(毫升)，鳳梨汁需要 3 份 $1800 \times 3 = 5400$ (毫升)

【方法二】

蘋果汁共 $12 \times 300 = 3600$ (毫升)，假設需要檸檬汁 x (毫升)，鳳梨汁 y (毫升)

- (1) 檸檬汁與蘋果汁的成份比為 1：2 可得 $x : 3600 = 1 : 2$ ，

由比例式的性質內項 \times 內項=外項 \times 外項可得 $2x = 3600$ ， $x = 1800$ ，

故需要檸檬汁 1800(毫升)

- (2) 鳳梨汁與蘋果汁的成份比為 3：2 可得 $y : 3600 = 3 : 2$ ，

由比例式的性質內項 \times 內項=外項 \times 外項可得 $2y = 10800$ ， $y = 5400$ ，

故需要鳳梨汁 5400(毫升)



若要調配相同風味的綜合果汁，假設分別需要檸檬汁、鳳梨汁及蘋果汁各 x 、 y 、 z 公升，根據前述小明的綜合果汁之成份比例可知 $x : y : z = 1 : 3 : 2$ ，像這樣將兩組同樣項數的連比用等號連結起來的式子就稱為**連比例式**。

- (5) 設 $x : 3 : y = 3 : 2 : 5$ ，求 x 、 y 的值 = ？

解：

【方法一】由 $x : 3 : y = 3 : 2 : 5$ 可得

$$x : 3 = 3 : 2, \text{ 由內項} \times \text{內項} = \text{外項} \times \text{外項} \text{ 得 } 2 \cdot x = 3 \cdot 3, x = \frac{9}{2}$$

$$3 : y = 2 : 5, \text{ 由內項} \times \text{內項} = \text{外項} \times \text{外項} \text{ 得 } 2 \cdot y = 3 \cdot 5, y = \frac{15}{2}$$

【方法二】由 $x : 3 : y = 3 : 2 : 5$ 比較等號兩邊的第二項， $3 \div 2 = 3 \div 2 = \frac{3}{2}$ (倍)

$$x = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, y = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$



隨堂練習

(1) 設 $x:6:z=3:8:5$ ，求 $x、z$ 的值＝？

◎由兩個比例式求連比

(6) 小琪和姊姊看到網紅示範「柳蘋汁」的製作方式，結果小琪只看到用 5 杯柳橙原汁配 1 杯水，姊姊則看到是用 4 杯蘋果原汁配 1 杯水，請問「柳蘋汁」的配方連比「柳橙原汁：蘋果原汁：水」會是多少？

解：

因為「柳蘋汁」的配方：

柳橙原汁：水＝5(杯)：1(杯)＝5：1

蘋果原汁：水＝4(杯)：1(杯)＝4：1

我們發現水是共同部份，而且上述兩個比當中水所對應的數都相同，

所以柳橙原汁：蘋果原汁：水的連比＝5：4：1，我們也可以寫成下列形式：

$$\begin{array}{rclcl}
 \text{柳橙原汁} & : & \text{蘋果原汁} & : & \text{水} \\
 5 & & & : & 1 \\
 & & 4 & : & 1 \\
 \hline
 = 5 & : & 4 & : & 1
 \end{array}$$

要求連比 $x:y:z$ 時，如果已知 $x:y$ 、 $y:z$ 與 $x:z$ 這三個比中的任意兩個比，可以先找到兩個比中的共同項所對應的數，如果相等就可以直接得到這三個數的連比。

例如：已知 $x:y=3:2$ 、 $y:z=2:1$ ，共同項為 y ，且兩個比中共同項 y 對應的數都是 2，所以 $x:y:z=3:2:1$



隨堂練習

(1) 阿達想要調配著名飲料「樺達奶茶」，假設配方需要紅茶：牛奶＝5：2，普洱茶：牛奶＝3：2，請問紅茶：普洱茶：牛奶的配方連比＝？



(7) 小琪和媽媽及姊姊一起包水餃，當小琪包了 3 顆水餃，同一時間媽媽恰好包了 5 顆水餃；當媽媽包了 4 顆水餃，同一時間姊姊恰好包了 3 顆水餃，請問小琪、媽媽、姊姊三人包水餃的速率連比為何？

解：

小琪和媽媽包水餃的速率比=3(顆)：5(顆)

媽媽和姊姊包水餃的速率比=4(顆)：3(顆)

我們發現媽媽包水餃的速率是共同部份，但是上述兩個比當中媽媽包水餃的速率所對應的數不相同，此時我們可以利用將比的前後項同乘一數也會是相等的比得到：

小琪和媽媽包水餃的速率比=3：5=(3×4)：(5×4)=12：20

媽媽和姊姊包水餃的速率比=4：3=(4×5)：(3×5)=20：15

所以小琪、媽媽及姊姊包水餃速率的連比=12：20：15，

我們也可以寫成下列形式：

$$\begin{array}{rcl} \text{小琪} & : & \text{媽媽} & : & \text{姊姊} \\ 12 & : & 20 & & \\ & & 20 & : & 15 \\ \hline = & 12 & : & 20 & : & 15 \end{array}$$

要求連比 $x:y:z$ 時，已知 $x:y$ 、 $y:z$ 與 $x:z$ 這三個比中的任意兩個比，如果找到兩個比中的共同項所對應的數不相等，我們可以先將兩個比各自乘以適當的數使得共同項對應的數相等，再求這三個數的連比。

例如：已知 $x:y=3:2$ 、 $y:z=1:2$ ，共同項為 y 但不相等。

將 $y:z=1:2$ 同×2 得到 $y:z=2:4$ ，此時共同項 y 對應的數相等，得到連比 $x:y:z=3:2:4$



(8) ① $x:y=1:2$ ， $y:z=2:3$ ，求連比 $x:y:z=?$

② $x:y=1:3$ ， $x:z=2:5$ ，求連比 $x:y:z=?$

③ $x:z=5:6$ ， $y:z=2:3$ ，求連比 $x:y:z=?$

解：① 找到共同項為 y 且兩個比中 y 對應的值相等

【橫式】

$$\begin{array}{rcl} x:y & = & 1:2 \\ y:z & = & 2:3 \\ \hline x:y:z & = & 1:2:3 \end{array}$$

【直式】

$$\begin{array}{rcl} x:y:z & & \\ 1:2 & & \\ & 2:3 & \\ \hline & = & 1:2:3 \end{array}$$



基本學習內容：NC-9-1-1、2

② 找到共同項為 x ，但兩個比中 y 對應的數不相等，將 $x:y=1:3$ 同 $\times 2$

【橫式】

$$\begin{array}{l} x:y = 1:3 \\ x:z = 2:5 \end{array}$$

($\times 2$) \rightarrow

$$\begin{array}{l} x:y = 2:6 \\ x:z = 2:5 \end{array}$$

【直式】

$$\begin{array}{r} x:y:z \\ 1:3: \\ 2: \quad 5 \\ \hline 2:6: \\ 2: \quad 5 \\ \hline = 2:6:5 \end{array}$$

③ 找到共同項為 z ，但兩個比中 z 對應的數不相等，將 $y:z=2:3$ 同 $\times 2$

【橫式】

$$\begin{array}{l} x:z = 5:6 \\ y:z = 2:3 \end{array}$$

($\times 2$) \rightarrow

$$\begin{array}{l} x:z = 5:6 \\ y:z = 4:6 \end{array}$$

【直式】

$$\begin{array}{r} x:y:z \\ 5: \quad 6 \\ 2:3: \\ \hline 5: \quad 6 \\ 4:6: \\ \hline = 5:4:6 \end{array}$$

(9) ① $x:y=2:3$ ， $y:z=2:5$ ，求連比 $x:y:z=?$

② $x:y=5:6$ ， $y:z=4:3$ ，求連比 $x:y:z=?$

解：

① 找到共同項為 y ，但兩個比中 y 對應的數不相等，先讓兩組比各別乘上一數使得共同項 y 可以具備相等的值（兩組比共同項 3 和 2 的最小公倍數為 6）

【橫式】

$$\begin{array}{l} x:y = 2:3 \\ y:z = 2:5 \end{array}$$

($\times 2$) \rightarrow

($\times 3$) \rightarrow

$$\begin{array}{l} x:y = 4:6 \\ y:z = 6:15 \end{array}$$

因為 $[3,2]=6$ ，所以上列
第 1 式 $\times 2$ ，第 2 式 $\times 3$

【直式】

$$\begin{array}{r} x:y:z \\ 2:3: \\ (\times 3) \quad 2:5 \\ \hline 4:6: \\ 6:15: \\ \hline = 4:6:15 \end{array}$$



- ② 找到共同項為 y ，但兩個比中 y 對應的數不相等，先讓兩組比各別乘上一數使得共同項 y 可以具備相等的值（兩組比共同項 6 和 4 的最小公倍數為 12）

【橫式】

$$\begin{array}{lcl} x:y & = 5:6 & (\times 2) \rightarrow x:y = 10:12 \\ y:z & = 4:3 & (\times 3) \rightarrow y:z = 12:9 \end{array}$$

因為 $[6,4]=12$ ，所以上列

第 1 式 $\times 2$ ，第 2 式 $\times 3$

$$x:y:z = 10:12:9$$

【直式】

$$x:y:z$$

$$\begin{array}{rcl} 5:6 & (\times 2) & \\ (\times 3) & 4:3 & \\ \hline 10:12 & & \\ & 12:9 & \\ \hline & = 10:12:9 & \end{array}$$



隨堂練習

- (1) 設 $x:y=3:2$ ， $y:z=5:2$ ，求 $x:y:z=?$
 (2) 設 $x:z=3:2$ ， $y:z=7:2$ ，求 $x:y:z=?$

- (10) 已知 x, y, z 皆不為 0，且 $2x=3y$ ， $2y=3z$ ，求 $x:y:z=?$

解：

【方法一】因兩個關係式都有 y ，所以把 y 當成 1 (份)， $x = \frac{3}{2}$ (份)， $z = \frac{2}{3}$ (份)，

$$x:y:z = \frac{3}{2}:1:\frac{2}{3} = 9:6:4$$

【方法二】由 $ax=by$ ，假設 y 當成 1 份， x 當成 $\frac{b}{a}$ 份， $x:y = \frac{b}{a}:1 = b:a$

得到 $2x=3y$ ， $x:y=3:2$ ；同理 $2y=3z$ ， $y:z=3:2$ ，所以 $x:y:z$ 為

【橫式】

$$\begin{array}{lcl} x:y & = 3:2 & (\times 3) \rightarrow x:y = 9:6 \\ y:z & = 3:2 & (\times 2) \rightarrow y:z = 6:4 \end{array}$$

因為 $[2,3]=6$ ，所以上列

第 1 式 $\times 3$ ，第 2 式 $\times 2$

$$x:y:z = 9:6:4$$

【直式】

$$x:y:z$$

$$\begin{array}{rcl} 3:2 & (\times 3) & \\ (\times 2) & 3:2 & \\ \hline 9:6 & & \\ & 6:4 & \\ \hline & = 9:6:4 & \end{array}$$



隨堂練習

- (1) 已知 x, y, z 皆不為 0，且 $4x=3z$ ， $6y=5z$ ，求 $x:y:z=?$



基本學習內容：NC-9-1-1、2

◎連比與連比例式的應用問題

已知 $a:b:c$ 是 $x:y:z$ 的最簡整數比，

如果一份是 m ，因為 x 是 a 份，所以 $x=am$ ；因為 y 是 b 份，所以 $y=bm$ ；

因為 z 是 c 份，所以 $z=cm$ ；也就是由 $x:y:z=a:b:c$ ，可以假設：

$$x=am, y=bm, z=cm$$

- (11) 小明、小華、小美各點一杯手搖杯飲料共付了 180 元，已知三人所付金額的連比為 $3:4:5$ ，則三人分別付了多少錢？

解：

由小明、小華、小美三人所付的金額比為 $3:4:5$ ，

假設小明付了 $3m$ (元)，小華付了 $4m$ (元)，小美付了 $5m$ (元)，其中 $m \neq 0$

可得 $3m+4m+5m=180$ ， $12m=180$ ， $m=15$

所以小明付了 $3 \times 15 = 45$ (元)

小華付了 $4 \times 15 = 60$ (元)

小美付了 $5 \times 15 = 75$ (元)



隨堂練習

- (1) 有一條 180 公分的電線，按照 $2:3:5$ 的比例，切成三段電線，請問這三段電線的長度為何？

- (12) 已知 $x:y:z=a:b:c$ ，且 a, b, c 皆不等於 0，請說明 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 且 $x:a = y:b = z:c$

解：

由 $x:y:z=a:b:c$ ，可以假設 $x=am$ ， $y=bm$ ， $z=cm$ ，且 $m \neq 0$

得 $\frac{x}{a} = \frac{am}{a} = m$ ， $\frac{y}{b} = \frac{bm}{b} = m$ ， $\frac{z}{c} = \frac{cm}{c} = m$ ，故 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 。

再由比值相同得到比也相同，故 $x:a = y:b = z:c$ 。



(13) 已知 $x:y=4:5$ ， $y:z=7:6$ ，試求下列的連比，並化為最簡整數比。

① $2x:3y:4z$

② $(x+y):(y+z):(z+x)$

解：

①

【橫式】

$$x : y : z$$

$$4 : 5$$

$$7 : 6$$

($\times 7$) \rightarrow

($\times 5$) \rightarrow

因為 $[5, 7] = 35$ ，上式 $\times 7$ ，下式 $\times 5$

$$x : y : z$$

$$28 : 35$$

$$35 : 30$$

$$28 : 35 : 30$$

【直式】

$$x : y : z$$

$$4 : \boxed{5} \quad (\times 7)$$

$$(\times 5) \quad \boxed{7} : 6$$

$$28 : \boxed{35}$$

$$\boxed{35} : 30$$

$$= 28 : 35 : 30$$

由 $x:y:z=28:35:30$ ，可以假設 $x=28m$ ， $y=35m$ ， $z=30$ ，且 $m \neq 0$

$$2x:3y:4z = (2 \times 28m):(3 \times 35m):(4 \times 30m)$$

$$= 56m:105m:120m = 56:105:120$$

② 承①，假設 $x=28m$ ， $y=35m$ ， $z=30m$ ，且 $m \neq 0$

$$(x+y):(y+z):(z+x) = (28m+35m):(35m+30m):(30m+28m)$$

$$= 63m:65m:58m = 63:65:58$$



隨堂練習

(1) $x:y=4:7$ ， $y:z=2:3$ ，求 $3x:2y:z=?$



小試身手

(1) 將下列各連比化為最簡整數比

① $60 : 30 : 120$ ② $\frac{5}{2} : \frac{10}{3} : \frac{15}{4}$

(2) x 、 y 、 z 皆不等於 0，且 $3x=2y$ ， $5x=4z$ ，則 $x:y:z=?$

(3) 若 $5:6:x = \frac{2}{3}:y:\frac{16}{15}$ ，則 $x=?$

(4) 中秋節時阿柚製作的廣式月餅、蛋黃酥、鳳梨酥的數量比為 $2:1:3$ ，其中只有製作廣式月餅和蛋黃酥時使用鹹蛋黃。若阿柚製作每個廣式月餅時使用 2 顆鹹蛋黃，製作每個蛋黃酥時使用 1 顆鹹蛋黃，且總共使用 120 顆鹹蛋黃，則他製作了幾個鳳梨酥？

(5) 家家文具店中，3 本筆記本與 7 枝鉛筆的價格相等，2 枝鉛筆與 3 個橡皮擦的價格相等。小靜到此文具店買這三種文具總共花了 335 元，其中筆記本、鉛筆和橡皮擦的數量比為 $3:8:11$ ，則小靜所買的鉛筆價格總共為多少元？



教育部國民及學前教育署 編

國民中學

學生學習扶助教材

9

年級數學

